Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

12.1. Stammfunktion, bestimmte und unbestimmte Integrale

(a) (∗) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$, eine Stammfunktion besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Sätze aus der Vorlesung. Überprüfen Sie dabei die Voraussetzungen.

(b) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Begründen Sie Ihre Rechnung.

Hinweis: Verwenden Sie Sätze aus der Vorlesung. Überprüfen Sie dabei die Voraussetzungen.

$$(*)\ \int_0^1 x^3\,dx$$
$$\int_0^1 x^k\,dx \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$
$$\int_0^x e^y\,dy \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^x \exp := \int_0^x \exp|_{[0,x]} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$(*)\ \int_x^0 \cos(y^2)y\,dy \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^1 e^{e^x}e^x dx \qquad (e^{e^x} := e^{(e^x)})$$
$$\int_0^1 (\exp\circ\exp)\exp$$
$$\int_1^x t^a\,dt \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ x \in]0,\infty[$$

Hinweis zum letzten Integral: Betrachten Sie den Fall $a = -1$ separat.

(c) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$(*)\ \int \exp$$
$$(*)\ \int p_a, \qquad p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := x^a, \qquad \text{für } a \in [0,\infty[$$
$$\int p_a, \qquad p_a : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := x^a, \qquad \text{für } a \in]-\infty,0[$$

(Hinweis: Betrachten Sie den Fall $a = -1$ separat.)

$$(*)\ \int(\exp + 2\cos) \qquad \text{(Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.)}$$

$$(*) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} dx$$

(d) **(∗)** Gilt $\int \exp = \exp$?

(e) **(∗)** Gilt $\exp \in \int \exp$?

(f) Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $p_{-k} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p_{-k}(x) := x^{-k}$. Gilt das Folgende?

$$\int p_{-2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \Big\{ -p_{-1} + C \,\Big|\, C : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ konstant} \Big\}$$

Lösung.

(a) Die Funktion f ist stetig. Ihr Definitionsbereich $[0,1]$ ist kompakt. Daher besitzt f ein Maximum und Minimum. Also ist f beschränkt. Da f stetig und beschränkt ist, ist es gemäss einem Satz aus der Vorlesung Riemann-integrierbar. Wir definieren die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_0^x f = \int_0^x e^{y^2} dy$. Da f stetig ist, ist F gemäss dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung $F' = f$.

(b) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, ist ein Polynom und daher stetig. Da ihr Definitionsbereich $[0,1]$ kompakt ist, ist f daher beschränkt. Da f stetig und beschränkt ist, ist es gemäss einem Satz aus der Vorlesung Riemann-integrierbar. Aus einem Beispiel aus der Vorlesung zur Produktregel (Potenzfunktion) folgt, dass die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \frac{x^4}{4}$, differenzierbar ist mit Ableitung gegeben durch $F'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3$. Also ist F eine Stammfunktion für f.

Gemäss dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass

$$\int_0^1 x^3 \, dx = \int_0^1 f = F\big|_{a:=0}^{b:=1} = F(1) - F(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Die folgenden Rechnungen können analog begründet werden. Wir definieren

$$p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := x^a \qquad \forall a \in [0, \infty[,$$
$$p_a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := x^a \qquad \forall a \in]-\infty, 0[.$$

Es gilt

$$\int_0^1 x^k\,dx = \int_0^1 p_k := \int_0^1 p_k|_{[0,1]} = \frac{p_{k+1}}{k+1}\Big|_{a:=0}^{b:=1} = \frac{1^{k+1}}{k+1} - \frac{0^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}, \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$
$$\int_0^x e^y\,dy = \int_0^x \exp = \exp|_0^x = \exp(x) - \exp(0) = e^x - 1, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^x \exp = e^x - 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(siehe oben)}$$
$$\int_x^0 \cos(y^2)y\,dy = \frac{1}{2}\sin(y^2)|_{y=x}^0 = \frac{1}{2}\Big(\sin(0^2) - \sin(x^2)\Big) = -\frac{1}{2}\sin(x^2), \text{ für } x \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^1 e^{e^x}e^x dx = \exp\circ\exp|_0^1 = e^{e^x}\Big|_{x=0}^1 = e^e - e$$
$$\int_0^1 (\exp\circ\exp)\exp = \exp\circ\exp|_0^1 = e^e - e$$
$$\int_1^x t^a\,dt = \frac{p_{a+1}}{a+1}\Big|_1^x = \frac{x^{a+1}-1}{a+1}, \quad \text{für } a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x \in]0,\infty[$$
$$\int_1^x t^{-1}\,dt = \log|_1^x = \log x - \log 1 = \log x, \quad \text{für } x \in]0,\infty[$$

(c) Sei X eine endliche Vereinigung von Intervallen mit positiven Längen. Wir definieren

$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} := \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}^X := \Big\{\text{lokal konstante Funktion von } X \text{ nach } \mathbb{R}\Big\},$$
$$\mathcal{C} := \mathcal{C}^X := \Big\{\text{konstante Funktion von } X \text{ nach } \mathbb{R}\Big\}.$$

Bemerkungen:

- Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Es gilt

$$\int f = F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} = \Big\{F + C \,\Big|\, C \in \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}\Big\}.$$

  Das folgt aus der Linearität des Ableitens und einem Korollar zum Mittelwertsatz. (Siehe die Vorlesung.)

- Falls $X = I$ ein Intervall ist, dann gilt

$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}^I = \mathcal{C}^I.$$

Die Funktion $F := \exp : I := \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion für $f := \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gemäss den obigen Bemerkungen gilt daher

$$\int \exp = \exp + \mathcal{C} = (x \mapsto e^x) + \mathcal{C} = \Big\{x \mapsto e^x + c \,\Big|\, c \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Die folgenden Rechnungen können analog begründet werden.

$$\int p_a = \frac{p_{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}, \qquad \text{für } a \in [0,\infty[$$

$$\int p_a = \frac{p_{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}_{\text{loc}}^{\mathbb{R}\setminus\{0\}}, \qquad \text{für } a \in]-\infty,0[\setminus\{-1\}$$

$$\int p_{-1} = \log(|\cdot|) + \mathcal{C}_{\text{loc}}^{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

$$\int (\exp + 2\cos) = \int \exp + 2\int \cos = (\exp + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}) + 2(\sin + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}) = (\exp + 2\sin) + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}$$

(mittels Linearität der unbestimmten Integration)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin + \mathcal{C}^{]-1,1[}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arsinh} + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{artanh} + \mathcal{C}^{]-1,1[}$$

(d) Nein, $\int \exp = \exp$ gilt nicht, da $\int \exp$ eine Menge von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist und exp eine Funktion ist. Es gilt stattdessen $\int \exp = \exp + \mathcal{C}$.

(e) Ja, $\exp \in \int \exp$ gilt, da exp eine Stammfunktion von exp ist.

(f) **Behauptung:** Nein, die Gleichheit

$$\int p_{-2} = \int \frac{1}{x^2}dx = \Big\{ -p_{-1} + C \,\Big|\, C : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \text{ konstant}\Big\} \tag{1}$$

gilt nicht.

Beweis: Wir stellen fest, dass $-p_{-1}$ eine Stammfunktion von p_{-2} ist. Wir betrachten jetzt die Funktion $C : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $C := 1$ auf $]0,\infty[$ und $C := 0$ auf $]-\infty, 0[$. Diese Funktion ist lokal konstant. Es folgt, dass $-p_{-1} + C \in \int p_{-2}$. Da C nicht konstant ist, ist $-p_{-1} + C$ jedoch nicht in der Menge auf der rechten Seite von (1) enthalten. Daher gilt die Gleichheit (1) nicht, wie behauptet.

Bemerkung: Stattdessen gilt, dass

$$\int p_{-2} = -p_{-1} + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \Big\{ -p_{-1} + C \,\Big|\, C : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \textit{ lokal} \text{ konstant}\Big\}.$$

12.2. (un-)bestimmte Integrale, partielle Integration Berechnen Sie die folgenden Integrale. Begründen Sie Ihre Rechnungen.

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration und Induktion.

(∗) $\int x^k e^{-x}\,dx$ (für $k \in \mathbb{N}_0$)

(∗) $\int \log$ (log ist auf $]0,\infty[$ definiert. Hinweis: $\log = \log \cdot 1$)

(∗) $\int_1^2 \log$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}$ (für $m \in \mathbb{N}_0$)

Hinweis zum letzten Integral: Gehen Sie ähnlich zum Beispiel $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}$ vor, das wir in der Vorlesung behandelt haben.

Lösung.

- Wir schreiben $\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\mathbb{R}}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

  $P(k)$:="Die Funktion $p_k \exp(-\bullet)$ besitzt eine Stammfunktion. Es gilt

  $$\int x^k e^{-x}\,dx = \int p_k \exp(-\bullet) = -\sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!} p_\ell \exp(-\bullet) + \mathcal{C}.\text{"} \tag{2}$$

  Behauptung: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $P(k)$ wahr.

  Beweis: Wir verwenden Induktion.

  Induktionsverankerung: $P(0)$ ist wahr, da

  $$\int p_0 \exp(-\bullet) = -\exp(-\bullet) + \mathcal{C} = -\sum_{\ell=0}^{k=0} \frac{0!}{\ell!} p_\ell \exp(-\bullet) + \mathcal{C}.$$

  Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}_0$, sodass $P(k)$ wahr ist. Wir definieren

  $$u := p_{k+1}, \qquad v := -\exp(-\bullet).$$

  Diese Funktionen sind differenzierbar. Gemäss Induktionsannahme $P(k)$ besitzt die Funktion $p_k \exp(-\bullet)$ eine Stammfunktion und gilt (2). Daher besitzt die Funktion $-(k+1)p_k \exp(-\bullet) = u'v$ eine Stammfunktion. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (partielle Integration) folgt daher, dass $uv' = p_{k+1} \exp(-\bullet)$

eine Stammfunktion besitzt und

$$\begin{aligned}
\int p_{k+1}\exp(-\bullet) &= \int uv' \\
&= uv - \int u'v \\
&= -p_{k+1}\exp(-\bullet) + (k+1)\int p_k \exp(-\bullet) \\
&= -p_{k+1}\exp(-\bullet) + (k+1)\left(-\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{\ell!}p_\ell \exp(-\bullet) + \mathcal{C}\right) \\
&\quad \text{(gemäss (2), Induktionsannahme } P(k)) \\
&= -\sum_{\ell=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{\ell!}p_\ell \exp(-\bullet) + \mathcal{C},
\end{aligned}$$

d. h., $P(k+1)$ gilt. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Mittels Induktion erhalten wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $P(n)$ gilt. Das beweist die Behauptung.

- Wir definieren

$$u := \log :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad v := p_1 :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ p_1(x) := x.$$

Diese Funktionen sind differenzierbar. Die Funktion $u'v = p_{-1}p_1 = p_0$ besitzt die Stammfunktion p_1. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (partielle Integration) folgt daher, dass uv' eine Stammfunktion besitzt und

$$\begin{aligned}
\int \log &= \int \log \cdot p_0 \\
&= \int uv' \\
&= uv - \int u'v \\
&= \log \cdot p_1 - \int p_{-1}p_1 \\
&= p_1 \cdot (\log - 1) + \mathcal{C} \\
&= \big(x \mapsto x(\log x - 1)\big) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

- Gemäss der letzten Teilaufgabe und einer Bemerkung aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \log &= \left(p_1 \cdot (\log - 1) + \mathcal{C}\right)\Big|_1^2 \\ &= p_1 \cdot (\log - 1)\Big|_1^2 \\ &= x(\log x - 1)\Big|_{x=1}^2 \\ &= 2(\log 2 - 1) - 1 \cdot (\log 1 - 1) \\ &= 2\log 2 - 1.\end{aligned}$$

- Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n . \tag{3}$$

Wir definieren rekursiv

$$b_0 := 1, \qquad b_k := \frac{2k}{2k+1} b_{k-1},\ k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

Behauptung: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$P(m) :=$"$I_{2m+1} = b_m$"

Beweis: Wir verwenden Induktion.

Induktionsverankerung: Für $m = 0$ gilt $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 = \sin\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = b_0$. Daher ist $P(0)$ wahr.

Induktionsschritt: Wir schreiben

$$J_k := \int \cos^{2k+1} .$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $P(k)$ gilt. Mittels partieller Integration mit $u := \cos^{2k+2}$, $v := \sin$ erhalten wir

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \int \cos^{2(k+1)+1} \\ &= \int uv' \\ &= uv - \int u'v \\ &= \cos^{2k+2}\sin - \int (2k+2)\cos^{2k+1}(-\sin)\sin, && (5) \\ \int \cos^{2k+1}\sin^2 &= \left(\int \cos^{2k+1}\left(1 - \cos^2\right)\right) \\ &= J_k - J_{k+1}, && (6) \\ J_{k+1} &= \cos^{2k+2}\sin + (2k+2)\Big(J_k - J_{k+1}\Big) \qquad \text{(wegen (5,6))}. && (7)\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} I_{2k+3} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+3} \qquad \text{(wegen (3))} \\ &= J_{k+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \cos^{2k+2} \sin\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k+2)\Big(J_k\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - J_{k+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Big) \qquad \text{(gemäss (7))} \\ &= \cos^{2k+2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^{2k+2} 0 \sin 0 + (2k+2) I_{2k+1} - (2k+2) I_{2k+3}, \end{aligned}$$

also $$I_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1}.$$

Mittels unserer Induktionsannahme $P(k)$ ($I_{2k+1} = b_k$) und der Tatsache $\frac{2k+2}{2k+3} b_k = b_{k+1}$ (siehe (4)) folgt daraus, dass

$$I_{2k+3} = b_{k+1},$$

d. h. $P(k+1)$ gilt. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Mittels Induktion folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $P(m)$ wahr ist. Das beweist die Behauptung.

Das Ziel der nächsten Aufgabe ist zu zeigen, dass Ableiten und Integration zu einander inverse Operationen sind. Das ist die Aussage eines Korollars aus der Vorlesung. Das Korollar folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

12.3. Integration und Ableiten zueinander invers Wir wiederholen zuerst ein paar Definitionen aus der Vorlesung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$C(X) := C(X, \mathbb{R}) := \Big\{ \text{stetige Funktion von } X \text{ nach } \mathbb{R} \Big\}.$$

Sei I ein Intervall mit positiver Länge und $c \in I$. Wir definieren

$$\begin{aligned} &C^1(I; c) := \Big\{ \text{stetig differenzierbare Funktion } F : I \to \mathbb{R} : F(c) = 0 \Big\}, \\ &\quad \mathrm{D}_c : C^1(I; c) \to C(I), \qquad \mathrm{D}_c(F) := F', \\ &\quad \int_c : C(I) \to C^1(I; c), \qquad \int_c (f) := \int_c^{\cdot} f, \quad \text{d. h.} \quad \int_c (f)(x) := \int_c^x f. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{D}_c \circ \int_c = \mathrm{id}_{C(I)}, \tag{8}$$

$$\int_c \circ \mathrm{D}_c = \mathrm{id}_{C^1(I;c)} \tag{9}$$

Bemerkungen:

- Das bedeutet, dass

$$\mathrm{D}_c\left(\int_c (f)\right) = \mathrm{id}_{C(I)}(f) = f, \qquad \forall f \in C(I),$$
$$\int_c (\mathrm{D}_c(F)) = \mathrm{id}_{C^1(I;c)}(F) = F, \qquad \forall F \in C^1(I;c).$$

- Aus (8,9) folgt, dass Ableiten D_c und Integration $\int_c$ bijektiv sind und Umkehrabbildungen voneinander sind, d. h.

$$\mathrm{D}_c^{-1} = \int_c, \qquad \int_c^{-1} = \mathrm{D}_c\,.$$

(Überlegen Sie sich das!)

Hinweise:

- (8): erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- (9): zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Bedingung $F(c) = 0$ für $F \in C^1(I;c)$

Lösung.(8): Sei $f \in C(I)$. Wir definieren

$$F := \int_c (f) : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_c^x f.$$

Sei $x \in I$. Da f an der Stelle x stetig ist, gilt gemäss dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $f(x) = F'(x)$. Also gilt

$$\begin{aligned} f &= F' \\ &= D_c(F) \\ &= D_c\left(\int_c (f)\right) \\ &= \mathrm{D}_c \circ \int_c (f). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{id}_{C(I)} = \mathrm{D}_c \circ \int_c$, d. h. (8).

(9): Sei $F \in C^1(I;c)$ und $x \in I$. Aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit a, b ersetzt durch c, x folgt, dass

$$\int_c (\mathrm{D}_c(F))(x) = \int_c^x F' = F(x) - F(c) = F(x),$$

da $F(c) = 0$. Daraus folgt, dass

$$\int_c \circ\, \mathrm{D}_c(F) = \int_c (\mathrm{D}_c(F)) = F.$$

Es folgt, dass

$$\int_c \circ \mathrm{D}_c = \mathrm{id}_{C^1(I;c)},$$

d. h. (9).

Das Ziel der nächsten Aufgabe ist, den Vektorraum zu verstehen, der die unbestimmten Integrale, das heisst, die Mengen der Stammfunktionen, enthält.

12.4. der Vektorraum, der die unbestimmten Integrale enthält Sei X eine endliche Vereinigung von Intervallen mit positiven Längen. Wir wiederholen ein paar Definitionen aus der Vorlesung. Wir schreiben

$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} := \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}^X := \Big\{\text{lokal konstante Funktion von } X \text{ nach } \mathbb{R}\Big\}.$$

Für jede Funktion $F_0 : X \to \mathbb{R}$ und jede Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ definieren wir

$$F_0 + \mathcal{F} := \Big\{F_0 + F, \Big| F \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Wir definieren

$$V := \Big\{F + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} \Big| F : X \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\Big\}.$$

Diese Menge enthält genau alle unbestimmten Integrale der Form $\int f$, wobei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt. Seien

$$c \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}, \mathcal{G} \in V.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} c\mathcal{F} := c \cdot \mathcal{F} &:= cF + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}, \\ \mathcal{F} + \mathcal{G} &:= (F + G) + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}, \end{aligned}$$

wobei $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ beliebig sind. Das Tripel $(V, +, \cdot)$ ist ein (reeller) Vektorraum. Dabei ist $\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ der Nullvektor von V. Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$2\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$$
$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$$
$$\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} - \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} := \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} + (-\mathcal{C}_{\mathrm{loc}})$$
$$(\exp + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}) + (\cos + \mathcal{C}_{\mathrm{loc}})$$
$$-\exp + \int \exp$$

Lösung. Es gilt $\mathcal{C}_{\text{loc}} = 0 + \mathcal{C}_{\text{loc}}$ und daher gemäss der Definition

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{C}_{\text{loc}} &= 2 \cdot 0 + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \mathcal{C}_{\text{loc}}, \\
\mathcal{C}_{\text{loc}} + \mathcal{C}_{\text{loc}} &= (0 + \mathcal{C}_{\text{loc}}) + (0 + \mathcal{C}_{\text{loc}}) = (0+0) + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \mathcal{C}_{\text{loc}}, \\
-\mathcal{C}_{\text{loc}} &:= (\text{additiv Inverses von } \mathcal{C}_{\text{loc}}) = \mathcal{C}_{\text{loc}}, \\
\text{daher} \qquad \mathcal{C}_{\text{loc}} - \mathcal{C}_{\text{loc}} &= \mathcal{C}_{\text{loc}} + (-\mathcal{C}_{\text{loc}}) = \mathcal{C}_{\text{loc}} + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \mathcal{C}_{\text{loc}}, \\
(\exp + \mathcal{C}_{\text{loc}}) + (\cos + \mathcal{C}_{\text{loc}}) &= (\exp + \cos) + \mathcal{C}_{\text{loc}}, \\
-\exp + \int \exp &= -\exp + (\exp + \mathcal{C}_{\text{loc}}) = (-\exp + \exp) + \mathcal{C}_{\text{loc}} = \mathcal{C}_{\text{loc}}.
\end{aligned}
$$

12.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \big(\varphi \mapsto -\cos(\varphi)\cos(\varphi)\big) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(ii) $\int \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \big(\varphi \mapsto \sin(\varphi)\sin(\varphi)\big) - \int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi.$

(iii) $\int x\log(x)\,dx = \big(x \mapsto \frac{x^2}{2}\log(x)\big) - \int \frac{x}{2}\,dx.$

(iv) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = \big(x \mapsto xe^{x^2}\big) - \int e^{x^2}\,dx.$

(v) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)}dx$$

(i) $-\frac{5}{36}$

(ii) $\frac{1}{2}(\log^2(3) - \log^2(2))$

(iii) $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$

(iv) $\arctan(\log(3)) - \arctan(\log(2))$

(c) Welches ist eine Stammfunktion zur folgenden Funktion:

$$x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$$

(i) $\arctan \circ \sin$

(ii) $\arccos \circ \sin$

(iii) $\log \circ \sin$

(iv) $\log \circ \tan$

(d) Welches ist eine Stammfunktion zur folgenden Funktion:

$$x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

(i) $\arctan \circ \sin$

(ii) $\arctan(1+\sin(\bullet))$

(iii) $\log \circ \sin$

(iv) $\log(1+\sin(\bullet))$

Lösung.

(a) (v)

(b) (iii)

(c) (i)

(d) (iv)