Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

13.1. Integration mittels Substitution Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) **(∗)** $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := x^2 + 1$

(b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := e^x$

(c) **(∗)** $\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy$ **Hinweise:** Substitution $y = F(x) := \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, Beispiel aus der Vorlesung

(d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-y}}{y-\sqrt{y}}dy$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := \sin^2 x$

(e) **(∗)** $\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan$

(g) $\int \frac{\exp}{\sqrt{1+\exp}}$

(h) $\int \tan$

Lösung.

(a) Substitution: $y = x^2 + 1$, $dy = 2x\,dx$. Dann:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^2 \frac{y-1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

(b) Substitution: $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$. Dann:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+y}}dy = 2\left[\sqrt{1+y}\right]_1^e = 2(\sqrt{1+e} - \sqrt{2})$$

(c) Substitution: $y = \sin x$, $dy = \cos x\,dx$. Dann:

$$\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Substitution: $y = \sin^2 x,\ dy = 2\sin x \cos x\, dx$. Dann:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-y}}{y-\sqrt{y}}dy &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x - \sin x}\sin x \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x - 1}dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x - 1}dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)dx = -2\left[x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2-\pi\end{aligned}$$

(e) Substitution: $y = x^3 + x^2 + x + 1,\ dy = (3x^2 + 2x + 1)dx$. Dann:

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}dx = \int_1^4 \frac{1}{y}dy = [\log y]_1^4 = \log(4)$$

(f) Substitution: $y = \cos x,\ dy = -\sin x\, dx$. Dann:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{y}dy = [\log y]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\log 2}{2}$$

(g) Substitution: $y = e^x,\ dy = e^x\, dx$. Dann:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+y}}\, dy = 2\sqrt{1+y} + C = 2\sqrt{1+e^x} + C$$

(h) Substitution: $y = \cos x,\ dy = -\sin x\, dx$. Dann:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{y}dy = -\log y + C = -\log\cos x + C$$

13.2. Partialbruchzerlegung

(a) **(∗)** Wir betrachten die komplexen Polynome

$$p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) := z + 1, \qquad q(z) := z^2 - 3z + 2.$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f := \frac{p}{q}$, indem Sie die Nullstellen z_1, z_2 von q bestimmen und den folgenden Ansatz machen:

$$f(z) = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}. \tag{1}$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor:

- Terme in (1) auf den gleichen Nenner q erweitern
- Koeffizienten des erweiterten Zählers mit den Koeffizienten von p vergleichen
- lineares Gleichungssystem für Koeffizienten lösen

(b) Rechnen Sie nach, dass die gefundene Partialbruchzerlegung tatsächlich die Funktion f darstellt.

(c) Zeigen Sie ohne Rechnung, dass die gefundene Partialbruchzerlegung die Funktion f darstellt.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(d) Wir betrachten die komplexen Polynome

$$p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) := z^2 - z + 1, \qquad q(z) := z^3 - 2z^2 + z.$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f := \frac{p}{q}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Nullstellen von q bestimmen
- Ansatz für die Partialbruchzerlegung machen, der für jede einfache Nullstelle z_0 von q einen Term der Form $\frac{c}{z-z_0}$ und für jede doppelte Nullstelle z_0 Terme der Form $\frac{c}{z-z_0}$ und $\frac{c}{(z-z_0)^2}$ enthält (für verschiedene Koeffizienten c).
- Terme auf den gleichen Nenner q erweitern
- Koeffizienten des erweiterten Zählers mit den Koeffizienten von p vergleichen

(e) **(∗)** Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) := \frac{z^3}{z+1}.$$

Hinweis: Polynomdivision

(f) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) := \frac{z^3 - 2z^2 + 3}{z^2 - 3z + 2}.$$

(g) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen, indem Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, der eine Formel für die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung liefert.

$$\begin{aligned}(*) f(z) &:= \frac{z+1}{z^2-3z+2}\\ f(z) &:= \frac{z^2-z+1}{z^3-2z^2+z}\\ f(x) &:= \frac{z}{(z^2-1)^2}\end{aligned}$$

Lösung.

(a) Die Nullstellen von q sind:

$$q(z) = (z-1)(z-2), \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 2.$$

Ansatz:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2}.$$

Beide Terme auf den gleichen Nenner erweitern:

$$f(z) = \frac{a(z-2)+b(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{(a+b)z-(2a+b)}{(z-1)(z-2)}.$$

Vergleich mit dem Zähler $p(z) = z+1$ ergibt das lineare Gleichungssystem:

$$a+b=1, \quad -2a-b=1.$$

Lösung:

$$a=-2, \quad b=3.$$

Die Partialbruchzerlegung lautet:

$$f(z) = \frac{-2}{z-1} + \frac{3}{z-2}.$$

(b)

$$\frac{-2}{z-1}+\frac{3}{z-2} = \frac{-2(z-2)+3(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{-2z+4+3z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}.$$

Das entspricht $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.

(c) Lösung folgt später

(d) Die Nullstellen von q sind:

$$q(z) = z(z-1)^2, \quad z_0 = 0\,(\text{einfach}),\ z_1 = 1\,(\text{doppelt}).$$

Ansatz:

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2}.$$

Alle Terme auf den gleichen Nenner erweitern:

$$f(z) = \frac{c_0(z-1)^2 + c_1 z(z-1) + c_2 z}{z(z-1)^2}.$$

Vergleich des Zählers mit $p(z) = z^2 - z + 1$ ergibt ein Gleichungssystem für c_0, c_1, c_2. Nach Lösung ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2}.$$

(e) Polynomdivision:

$$\frac{z^3}{z+1} = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}.$$

Die Partialbruchzerlegung lautet:

$$f(z) = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}.$$

(f) Polynomdivision:

$$\frac{z^3 - 2z^2 + 3}{z^2 - 3z + 2} = z + 1 + \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}.$$

Die Partialbruchzerlegung für den verbleibenden Term $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$ ergibt sich wie in der ersten Teilaufgabe:

$$\frac{z+1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-2}{z-1} + \frac{3}{z-2}.$$

Gesamt:

$$f(z) = z + 1 - \frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-2}.$$

(g) Lösung folgt später

13.3. Integrale, Partialbruchzerlegung Berechnen Sie die folgenden Integrale.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

(a) (∗) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

(b) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

(c) (∗) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$

(d) $\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2-3x+2}dx$

(e) $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

(f) $\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

(g) $\int \frac{1}{x^3-x^2+x-1}dx$

Hinweise zum letzten Integral:

- Erraten Sie eine Nullstelle des Nenners.
- Überprüfen Sie, ob es weitere reelle Nullstellen gibt.
- Verwenden Sie eine reelle Version der Partialbruchzerlegung. Machen Sie dazu einen Ansatz, der für jeden Faktor des Nennerpolynoms der Form $\left(x^2+\alpha x+\beta\right)$ Terme der Form $\frac{c(2x+\alpha)}{x^2+\alpha x+\beta}$ und $\frac{c}{x^2+\alpha x+\beta}$ enthält.

Lösung.

(a) Für $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$, verwenden wir die Partialbruchzerlegung aus Aufgabe 2:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Das Integral wird:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -2\log|x-1| + 3\log|x-2| + C.$$

(b) Für $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$, verwenden wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Das Integral wird:

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \log|x| - \frac{1}{x-1} + C.$$

(c) Für $\int \frac{x^3}{x+1}dx$, verwenden wir die Polynomdivision:

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Das Integral wird:

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int x^2dx - \int xdx + \int 1dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log|x+1| + C.$$

(d) Für $\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2-3x+2}dx$, verwenden wir die Polynomdivision und die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3-2x^2+3}{x^2-3x+2} = x + 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Das Integral wird:

$$\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2-3x+2}dx = \int xdx + \int 1dx - \int \frac{2}{x-1} + \int \frac{3}{x-2} = \frac{x^2}{2} + x - 2\log|x-1| + 3\log|x-2| + C.$$

(e) Für $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$, verwenden wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}.$$

Das Integral wird:

$$\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + C.$$

(f) Für $\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$, verwenden wir das Ergebnis aus (e):

$$\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right]_2^3 = \frac{5}{48}.$$

(g) Wir erraten die Nullstelle $x_1 = 1$. Das Polynom faktorisiert sich also in

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1).$$

Daraus ergibt sich die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Das Integral wird:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C\end{aligned}$$

13.4. gliedweise Integration einer Potenzreihe Ein Ziel dieser Aufgabe ist es, das Integral $\int_0^{\frac{1}{10}} e^{y^2} dy$ numerisch näherungsweise zu berechnen.

(a) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$, gegeben ist.

Hinweis: Die Exponentialfunktion ist als punktweiser Limes einer Potenzreihe definiert.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_0^x e^{y^2} dy. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die letzte Teilaufgabe und einen Satz aus der Vorlesung zur Integration einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion.

Bemerkung: Wie in der Vorlesung erwähnt, ist F keine *elementare Funktion*, d. h. F ist nicht durch eine *Formel* darstellbar. Gemäss dieser Teilaufgabe ist F jedoch durch eine *Potenzreihe* darstellbar.

(c) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x) := \int_0^x \cos(y^2) dy.$$

(d) Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad H(x) := \int_0^x \sin(y^2) dy.$$

(e) Zeigen Sie, dass die Funktion F (wie in (2)) glatt ist.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion.

(f) Bestimmen Sie die Taylorreihe von F mit Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

Hinweis: Verwenden Sie ein Beispiel aus der Vorlesung über die Taylorreihe einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion.

(g) Bestimmen Sie $T^3_{F,x_0=0}\left(\frac{1}{10}\right)$, das Taylorpolynom von F dritter Ordnung um $x_0 = 0$ an der Stelle $x = \frac{1}{10}$.

(h) Zeigen Sie, dass dieses Polynom an der Stelle $\frac{1}{10}$ das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^{y^2} dy$$

bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-5} nähert. Sie dürfen dabei verwenden, dass $\left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} + \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\right) e^{10^{-2}} < 10^{-1}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Taylor.

Lösung.

(a) Die Funktion $f(x) = e^{x^2}$ kann durch die Exponentialreihe dargestellt werden. Für e^u gilt:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad \text{für } u \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir $u = x^2$, so erhalten wir:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

(b) Da e^{y^2} durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{n!}$ dargestellt werden kann, gilt:

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{n!}\, dy.$$

Laut dem Satz aus der Vorlesung ist eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion gliedweise integrierbar. Somit:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{y^{2n}}{n!}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

(c) Für $G(x) = \int_0^x \cos(y^2)\,dy$, verwenden wir die Potenzreihe der Kosinusfunktion:

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}.$$

Setzen wir $u = y^2$, so gilt:

$$\cos(y^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n}}{(2n)!}.$$

Dann:

$$G(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n}}{(2n)!}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x y^{4n}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}.$$

(d) Für $H(x) = \int_0^x \sin(y^2)\,dy$, verwenden wir die Potenzreihe der Sinusfunktion:

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Setzen wir $u = y^2$, so gilt:

$$\sin(y^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Dann:

$$H(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x y^{4n+2}\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

(e) Die Funktion $F(x)$ ist durch die Potenzreihe:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

definiert. Da Potenzreihen glatte (beliebig oft differenzierbare) Funktionen darstellen, ist $F(x)$ glatt.

(f) Die Taylorreihe von F mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch ihre Potenzreihe:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

(g) Das Taylorpolynom dritter Ordnung von $F(x)$ um $x_0 = 0$ ist gegeben durch die ersten Terme der Taylorreihe:

$$T^3_{F,x_0=0}(x) = \frac{x}{1 \cdot 0!} + \frac{x^3}{3 \cdot 1!} = x + \frac{x^3}{3}.$$

An der Stelle $x = \frac{1}{10}$ ist:

$$T^3_{F,x_0=0}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{300} = \frac{31}{300}.$$

(h) Lösung folgt später

13.5. gewöhnliche Differentialgleichung, Separation der Variablen Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für eine differenzierbare Funktion $u : [0,1[\to \mathbb{R}$,

$$\dot{u}(t) = 2tu(t)^2, \qquad \forall t \in [0,1[, \tag{3}$$

zusammen mit der *Anfangsbedingung*

$$u(t_0 := 0) = 1. \tag{4}$$

Wir nennen (3,4) ein *Anfangswertproblem.* Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems, die nirgends verschwindet.

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass u gegeben ist durch

$$u(t) = \frac{1}{1-t^2}, \qquad \forall t \in [0,1[. \tag{5}$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (gewöhnliche Differentialgleichung). Betrachten Sie dabei $\int_{t_0=0}^{t} \frac{\dot{u}}{u^2}$.

(b) Leiten Sie die Lösungsformel (5) für das Anfangswertproblem (3,4) nochmals heuristisch her, indem Sie die Variablen t und u in der Differentialgleichung (3) voneinander trennen, d. h., alle u-Terme nach links bringen und alle t-Terme nach rechts bringen. Schreiben Sie dazu $\dot{u}$ als $\frac{du}{dt}$.

Hinweis: Gehen Sie dabei wie in einer Bemerkung in der Vorlesung vor.

(c) Was ist am heuristischen Argument der letzten Teilaufgabe nicht mathematisch präzise?

Lösung.

(a) Um die Lösung zu finden, betrachten wir den Ansatz aus der Vorlesung. Teilen wir beide Seiten der Gleichung durch $u(t)^2$, erhalten wir:

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)^2} = 2t.$$

Integrieren der linken Seite nach t gibt:

$$\int \frac{\dot{u}(t)}{u(t)^2} dt = -\frac{1}{u(t)} + C_1.$$

Integrieren der rechten Seite nach t gibt:

$$\int 2t dt = t^2 + C_2.$$

Gleichsetzen und auflösen nach $u(t)$ ergibt:

$$u(t) = \frac{1}{C_3 - t^2}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(0) = 1$ folgt, dass $C_3 = 1$ und somit

$$u(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

(b) Um die Lösung heuristisch herzuleiten, schreiben wir die Differentialgleichung $\dot{u}(t) = 2tu(t)^2$ als:

$$\frac{du}{dt} = 2tu^2.$$

Trennen wir die Variablen u und t, indem wir durch u^2 teilen und mit dt multiplizieren:

$$\frac{1}{u^2} du = 2t\, dt.$$

Integrieren wir beide Seiten:

$$\int \frac{1}{u^2} du = \int 2t\, dt.$$

Die Integrale ergeben:

$$-\frac{1}{u} = t^2 + C,$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Umstellen nach u:

$$u = -\frac{1}{t^2 + C}.$$

Die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ verwenden wir, um C zu bestimmen:

$$u(0) = -\frac{1}{0^2 + C} = 1 \implies C = -1.$$

Setzen wir $C = -1$ ein, ergibt sich:

$$u = -\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{1 - t^2}.$$

(c) Die Differenziale du und dt machen alleine keinen Sinn. Nur in Kombination als Bruch $\frac{du}{dt}$.

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)^2}\, dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(b) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_0^a f(x)dx = 0$$

(iii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(c) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

(ii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_0^a f(x)dx = 0$$

(iii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

Lösung.

(a) (i)

(b) (i)

(c) (iii)