

3.1. Konvergenz

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten und gegebenenfalls den Grenzwert der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) $a_n = \frac{n^3 - \sqrt{n}^5}{n^2 + 1} + (-1)^n 10^{27}$

(b) $a_n = \frac{n^3 + n^2}{n^2 + 1} - \frac{n^3 - n^2}{n^2 + 1}$

(c) $a_n = \frac{n^{97} - n^{44}}{n^5 - n^2 + 2^n}$

3.2. Arithmetisches Mittel

- (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: Die Idee ist, die Summe s_n in zwei Teile aufzuteilen:

$$s_n - a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (a_k - a) + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (a_k - a).$$

Die Summe im ersten Term ist unabhängig von n und der zweite Term kann dank der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschätzt werden.

- (b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

3.3. Konvergenz von Reihen

Verwenden Sie das Quotientenkriterium oder das Wurzelkriterium, um die Konvergenz der folgenden Reihen nachzuweisen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$ für alle reellen Zahlen x .

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} x^n$ für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ für alle reellen Zahlen x .