4.1. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : (0, 0.999) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

- (a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise?
- (b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig?

4.2. Gleichmässige Konvergenz 2

Wir betrachten die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq n \\ x - n, & \text{if } n < x < n + 1 \\ 1, & \text{if } n + 1 \leq x \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_n .
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

- (c) Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert auf $\mathbb{R}$.
- (d) Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eingeschränkt auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

4.3. Zwischenwertsatz 1

Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, es gelte: $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit:

$$f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$$

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ an, mit $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

4.4. Zwischenwertsatz 2

Es sei

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass ein $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ existiert, sodass $f(x) = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.