5.1. Rechenregeln für Ableitungen

Argumentieren Sie, warum die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre Ableitungen:

(a) $\log(\sin(x))$ für $x \in (0, \pi)$,

(b) a^x für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \in (0, \infty)$,

(c) x^x für $x \in (0, \infty)$,

(d) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(e) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in (4, \infty)$,

5.2. Potenzen der Betragsfunktion

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^{\alpha+1}.$$

Bestimmen Sie, für welche α die Ableitung von f_α an der Stelle 0 existiert.

5.3. Abschätzungen aus Ableitungen

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$, sowie $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

(a) Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Falls sogar $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so zeigen Sie ferner:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in (a, b].$$

Hinweis: *Benutzen Sie den Mittelwertsatz.*

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \log(x) < x - 1, \quad \forall x > 1.$$