6.1. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int x^3 \arctan x\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx,$

6.2. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets $x \in]-\pi, \pi[$ und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t(x)}{1+t(x)^2}$$

Hinweis: *Sie dürfen die folgenden trigonometrischen Identitäten verwenden (Additionstheoreme):*

$$\begin{aligned}\cos(x) =& \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2\\ \sin(x) =& 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1+t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass $t(x)$ eine bijektive, streng monotone Funktion von $]-\pi, \pi[$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(c) Nutzen Sie die Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$ um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

6.3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a) $\sin(x)^2$

(b) $\sin(x)e^x$

(c) $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(d) $\sinh(x)\cos(x)$

Hinweis: *In einigen Fällen könnte es hilfreich sein, mehrmals partiell zu integrieren.*