## 4.1. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei
$$f_n : (0, 0.999) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

**(a)** Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

**(b)** Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig?

**Lösung.**

**(a)** Für jedes $x \in (0, 0.999)$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$
deswegen konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion
$$f : (0, 0.999) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

**(b)** Die Folge konvergiert gleichmässig gegen $f$. Tatsächlich gilt $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\sup_{x\in(0,0.999)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,0.999)} x^n = (0.999)^n.$$
Da
$$\lim_{n\to\infty} 0.999^n = 0,$$
schliessen wir, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen $f$ konvergiert.

## 4.2. Gleichmässige Konvergenz 2

Wir betrachten die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq n \\ x - n, & \text{if } n < x < n+1 \\ 1, & \text{if } n+1 \leq x \end{cases}$$

**(a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_n$.

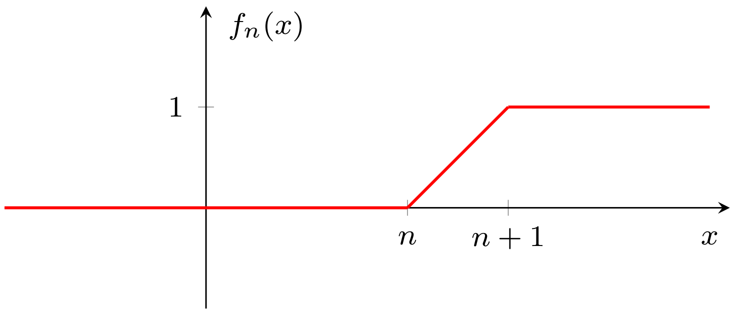
**(b)** Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

**(c)** Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert auf $\mathbb{R}$.

**(d)** Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

**Lösung.**

**(a)**




**(b)** Es sei $x \in \mathbb{R}$ fix. Dann gilt für $n \geq x$:

$$f_n(x) = 0.$$

Das bedeutet, für $n$ gross genug, ist die Folge $(f_n(x))$ konstant gleich 0. Daher ist der punktweise Grenzwert der Funktionsfolge gerade $f(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

**(c)** Falls die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergiert, muss der gleichmässige Grenzwert mit dem punktweisen Grenzwert übereinstimmen, also $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Man bemerke, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x).$$

Daher gilt auch

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1,$$

da $f_n(x) = 1$ für alle $x \geq n+1$, was das Maximum der Funktion $f_n$ ist. Somit kann $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ nicht gegen Null konvergieren, und die Funktionenfolge konvergiert nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ gegen $f$.

**(d)** Sei $R > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq R$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [-R, R]$:

$$f_n(x) = 0,$$

denn $x \leq R \leq N \leq n$. Somit gilt also, dass die Funktionen $f_n$, für $n$ gross genug, konstant gleich 0 sind auf $[-R, R]$. Daher konvergiert die Funktionenfolge auf $[-R, R]$ trivialerweise gleichmässig gegen $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

### 4.3. Zwischenwertsatz 1

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, es gelte: $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit:

$$f\left(c + \tfrac{1}{2}\right) = f(c)$$

***Hinweis:*** *Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion* $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *an, mit* $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

**Lösung.** Wir definieren die Funktion $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$g(x) := f\Big(x + \tfrac{1}{2}\Big) - f(x), \quad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]$$

Wir werden zeigen, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $g(c) = f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 0$, denn dann gilt $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$ für dieses $c$. Dazu betrachten wir die Randwerte 0 und $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) - f(0), \\ g\Big(\tfrac{1}{2}\Big) &= f(1) - f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) = f(0) - f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) = -\Big(f\Big(\tfrac{1}{2}\Big) - f(0)\Big) = -g(0), \end{aligned}$$

wobei wir $f(0) = f(1)$ verwendet haben. Falls $g(0) = 0$, dann können wir $c = 0$ nehmen. Falls $g(0) \neq 0$, dann haben $g(0)$ und $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Also gilt $0 \in [g(0), g(\frac{1}{2})]$ (für $g(0) < 0$), respektive $0 \in [g(\frac{1}{2}), g(0)]$ für $g(0) > 0$. Gemäss dem Zwischenwertsatz muss also die stetige Funktion $g$ den Wert 0 an einer Stelle $c \in [0, \frac{1}{2}]$ annehmen. Somit ist der Beweis abgeschlossen.

### 4.4. Zwischenwertsatz 2

Es sei

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass ein $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ existiert, sodass $f(x) = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.

**Lösung.** Nein. Als Gegenbeispiel betrachte man die Funktion

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \infty, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{falls } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist $f$ stetig, $f(-2) = -1$ und $f(2) = 1$, aber $f$ nimmt den Wert 0 nicht an.