

6.1. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx,$

(c) $\int x^3 \arctan x \, dx,$

(b) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x} dx,$

(d) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx,$

Lösung.

(a) Die Substitution $t = 2^x$ (mit $\frac{dt}{dx} = \log(2)2^x$) liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x}{1+4^x} dx &= \frac{1}{\log(2)} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\log(2)} \arctan(t) + C \\ &= \frac{1}{\log(2)} \arctan(2^x) + C, \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} &= \int_3^4 \frac{dx}{x(x-2)} = \int_3^4 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\log(x-2) - \log(x) \right) \Big|_{x=3}^{x=4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log(2) - \log(1) - \log(4) + \log(3) \right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

(c) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int x^3 \arctan(x) \, dx = \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned} \int x^3 \arctan(x) \, dx &= \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \arctan(x) + C \end{aligned}$$

(d) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

6.2. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets $x \in]-\pi, \pi[$ und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1 - t(x)^2}{1 + t(x)^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t(x)}{1 + t(x)^2}$$

Hinweis: Sie dürfen die folgenden trigonometrischen Identitäten verwenden (Additionstheoreme):

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1 + t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass $t(x)$ eine bijektive, streng monotone Funktion von $] -\pi, \pi[$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(c) Nutzen Sie die Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$ um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

Lösung.

(a) Wir berechnen:

$$1 + t(x)^2 = 1 + \frac{\sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2} = \frac{\cos(x/2)^2 + \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2} = \frac{1}{\cos(x/2)^2}$$

Dies folgt aus der üblichen Identität $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Ferner sehen wir:

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{\frac{\cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2}}{\frac{1}{\cos(x/2)^2}} = \cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2 = \cos(x),$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem für Kosinus verwendet haben. Ganz ähnlich findet man:

$$\frac{2t}{1 + t^2} = 2 \cos(x/2)^2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \sin(x),$$

unter Verwendung des Additionstheorems für Sinus.

(b) Direktes Ableiten zeigt:

$$t'(x) = \frac{1}{2} \tan' \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right) = \frac{1 + t^2}{2}$$

Man beachte, dass also $t'(x) \geq 1/2$ gilt, somit ist $t(x)$ streng monoton wachsend, also auch injektiv. Die Surjektivität lässt sich aus der Surjektivität des Tangens auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgern, oder direkt durch berechnen von $\lim_{x \rightarrow -\pi} t(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \pi} t(x) = \infty$.

(c) Unter Verwendung der vorherigen Teilaufgaben, und mit $t(0) = 0$ und $t(\frac{\pi}{2}) = 1$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{2t(x)}{1+t(x)^2} + \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}} \frac{2}{1+t(x)^2} t'(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2t + 1 - t^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2 - (t-1)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(t-1)^2}{2}} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1 - y^2} \sqrt{2} dy \\ &= \sqrt{2} \left(\operatorname{arctanh}(0) - \operatorname{arctanh} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Hier haben wir $y = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$ verwendet in der zweiten Substitution. Alternativ kann man mittels Partialbruchzerlegung sehen:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1-y^2} \sqrt{2} dy &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1-y} dy + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1+y} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log(3 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Beide Lösungen sind korrekt (weil $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$).

6.3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a) $\sin(x)^2$

(c) $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(b) $\sin(x)e^x$

(d) $\sinh(x)\cos(x)$

Hinweis: In einigen Fällen könnte es hilfreich sein, mehrmals partiell zu integrieren.

Lösung.

(a) Aus partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^2 dx &= \int (-\cos(x))' \sin(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos(x) (\sin(x))' dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos(x)^2 dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int (1 - \sin(x)^2) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + x - \int \sin(x)^2 dx \end{aligned}$$

und somit:

$$2 \int \sin(x)^2 dx = -\cos(x) \sin(x) + x + 2C,$$

daher auch:

$$\int \sin(x)^2 dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{x}{2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)e^x dx &= \int (-\cos(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int (\sin(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx \end{aligned}$$

Löst man dies nun nach der Stammfunktion auf, so sehen wir:

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(c) Gemäss der Kettenregel ist klar, dass $e^{\sin(x)}$ eine Stammfunktion ist. Daher gilt:

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(d) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int \sinh(x) \cos(x) dx &= \cosh(x) \cos(x) + \int \cosh(x) \sin(x) dx \\ &= \cosh(x) \cos(x) + \sinh(x) \sin(x) - \int \sinh(x) \cos(x) dx, \end{aligned}$$

und somit:

$$\int \sinh(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} (\cosh(x) \cos(x) + \sinh(x) \sin(x)) + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.