Diese Übungsserie dient der Repetition von Gymnasialstoff. Ein Teil des hier behandelten Stoffes wird in der Vorlesung Analysis 1 aufgefrischt. Es ist daher nicht schlimm, wenn Sie nicht alle Aufgaben lösen können. Falls diese Aufgaben Ihnen jedoch einige Mühe bereiten, empfehlen wir Ihnen den Brückenkurs Mathematik der ETH:

<https://pontifex.ethz.ch/site8/>

Weitere Repetitionsaufgaben bietet der Selbsteinschätzungstest Mathematik der ETH:

https://ethz.ch/content/dam/ethz/main/education/bachelor/studienberatung/Studienstart/files/Selbsteinschaetzungstest-Mathematik_12.10.21.pdf

0.1. Graphen von Funktionen und Mengen zeichnen

(i) Für jede der folgenden Funktionen einer reellen Variable zeichnen Sie vier Punkte in der Ebene, die auf dem Graphen der Funktion liegen. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

a) $\exp_2$, die Exponentialfunktion zur Basis 2, welche durch $\exp_2(x) := 2^x$ definiert ist

b) $\log_2$, die Logarithmusfunktion zur Basis 2

c) Sinusfunktion

d) Kosinusfunktion

e) $f(x) := e^{-x^2}$

Bemerkung: Diese Funktion heisst *gaußsche Glockenfunktion*. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Statistik.

(ii) Wie hängen die Graphen von $\exp_2$ und $\log_2$ zusammen?

0.2. Ableitung

Wir schreiben e für die Eulersche Zahl.

(i) Berechnen Sie die Ableitung f' jeder der folgenden Funktionen:

a) $f(x) := x^2$

b) $f(y) := y^2$

c) $f(x) := e^x$

d) $f(x) := e^{x^2} := e^{(x^2)}$

(ii) Bestimmen Sie $f'(0)$ für jede dieser Funktionen.

0.3. Integral, Ableitung

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 x \, dx$

b) $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx$

c) $\int_{-1}^1 |x| \, dx$

d) $\int_{-1}^1 |y| \, dy$

(ii) Wir definieren die Funktion f durch $f(x) := \int_1^x \cos(y) \, dy$. Bestimmen Sie die Ableitung von f .

(iii) Bestimmen Sie die Ableitung von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

0.4. wenn, (entweder) oder, es gibt, für jedes

(i) Für welche natürlichen Zahlen n ist die folgende Aussage wahr:

“Wenn n gerade ist, dann ist $n + 1$ ungerade.”

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(ii) “Wenn 1 gerade ist, dann ist 2 ungerade.”

(iii) “ $1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade.”

(iv) “Entweder ist $1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade.”

(v) “Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n , sodass $m \leq n$ gilt.”

- (vi) “Es gibt eine natürliche Zahl n , sodass für jede natürliche Zahl m gilt, dass $m \leq n$.”

0.5. Mengen

- (i) Wie viele Elemente haben die folgenden Mengen?

- a) die leere Menge $\emptyset$
- b) $\{\emptyset\}$
- c) $\{0, 1, 0\}$
- d) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

- (ii) Was ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0?$$

- (iii) Zeichnen Sie die folgenden Mengen.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Bemerkung: $\mathbb{R}^2$ ist die (euklidische) Ebene.

- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Bemerkung: $\mathbb{R}^3$ ist der dreidimensionale (euklidische) Raum.

0.6. Folge, Konvergenz, Grenzwert Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$ und $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit und ohne 0. Berechnen Sie die ersten 6 Glieder der folgenden Folgen:

- (i) $(a_n := n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- (ii) die rekursiv definierte Folge $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$, für $n \geq 2$

- (iii) Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen, ob sie konvergiert. Falls das der Fall ist, geben Sie dann den Grenzwert an.

- a) $(a_n := n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- b) $(a_n := \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\left(a_n := \frac{n+1}{n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

0.7. Summe, Induktion, (unendliche) Summe

(i) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^4 i.$$

(ii) Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ schreiben Sie $\sum_{i=1}^k i$ als eine Summe, in welcher der Index i von 1 bis $k-1$ läuft, plus einen zusätzlichen Term. (Hierbei ist $\sum_{i=1}^0 a_i$ die leere Summe, also gleich 0.)

(iii) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tipp: Verwenden Sie (vollständige) Induktion.

Bemerkung: Induktion wird in Analysis 1 nochmals behandelt.

(iv) Berechnen Sie die unendliche Summe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$