Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

1.1. Verknüpfungen von Aussagen

(a) Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen mittels mathematischer Symbole, ohne Wörter. Verwenden Sie das Negationszeichen $\neg$ und die Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \dot{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$:

a) "Null plus eins ist eins, und null ist grösser als eins."

b) "Null plus eins ist eins, oder null ist kleiner als eins."

c) "Entweder ist null plus eins gleich eins, oder null ist kleiner als eins."

d) "Wenn null grösser als eins ist, dann ist null plus eins gleich null."

e) "Null ist genau dann grösser als eins, wenn null plus eins gleich eins ist."

(b) Bestimmen Sie für jede der obigen Aussagen, ob sie wahr ist.

1.2. Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz

(a) **(∗)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \wedge Q), \qquad (\neg P) \vee (\neg Q).$$

(b) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \tag{1}$$

d. h., die Aussagen $\neg(P \wedge Q)$ und $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sind logisch äquivalent.

(c) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \vee Q), \qquad (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

(d) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{2}$$

Bemerkung: (1,2) sind die de-morganschen Gesetze für Aussagen.

(e) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(\neg Q) \Rightarrow \neg P.$$

(f) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow \neg P. \tag{3}$$

Bemerkung: *Kontraposition* (oder *Umkehrschluss*) ist die logische Schlussregel, die von der Implikation $P \Rightarrow Q$ auf ihr Kontraponiertes $(\neg Q) \Rightarrow \neg P$ schliesst. Diese Regel ist gültig wegen (3).

(g) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

(h) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

(i) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$P \wedge (Q \vee R), \qquad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(j) Zeigen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R). \tag{4}$$

Bemerkungen:

- Das ist das *Distributivgesetz* für die Konjunktion $\wedge$ und die Disjunktion $\vee$. Dieses Gesetz ist analog zum Distributivgesetz für die Multiplikation und Addition von Zahlen.
- Bemerkenswerterweise gilt das Distributivgesetz für $\wedge$ und $\vee$ auch umgekehrt, also:

  $$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \tag{5}$$

  Dadurch unterscheiden sich die Konjunktion und die Disjunktion von der Multiplikation und Addition von Zahlen.

(k) Gilt

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee R?$$

(l) Überlegen Sie sich, welche mathematischen Interpretationen die alltägliche Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." besitzt. Geben Sie für jede Interpretation die Wahlmöglichkeiten an, die der Kunde/ die Kundin besitzt. Sind die Interpretationen zueinander äquivalent? Welche mathematischen Interpretationen hat die gleiche Äusserung mit "oder" ersetzt durch "entweder … oder"?

1.3. Beweise

Bemerkung: In dieser Aufgabe dürfen Sie Eigenschaften von Zahlen, die Sie aus dem Gymnasium kennen, ohne Beweis verwenden. Geben Sie an, wo Sie welche Eigenschaft verwenden.

Hinweis: Wenn Sie nicht weiterkommen, schauen Sie sich dann die Beweise ähnlicher Sätze in der Vorlesung an.

(a) **(∗)** Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 1. *Die Zahl*

$$5 \cdot 4^{\frac{(3 \cdot 123456789+1)^2-1}{3}}$$

ist ganz.

(b) Beweisen Sie die folgenden Sätze

- mittels Kontraposition,
- mittels Widerspruch:

a)

Satz 2. *Es gilt:*

$$\sqrt{3} < \sqrt{5}$$

b)

Satz 3. *Es gilt:*

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} < \sqrt{6}$$

(c) Ist die folgende Argumentation ein (korrekter) Beweis? Falls nein, warum nicht?

"Satz": Es gilt: $0 = 1$

"Beweis": Wir subtrahieren 1 auf beiden Seiten: $0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Wir multiplizieren mit 0: $0 \cdot (0 - 1) = 0 \cdot 0$

Da $0 \cdot x = 0$, erhalten wir: $0 = 0$

Damit haben wir gezeigt, dass $0 = 1$.

1.4. Induktion Beweisen Sie die folgenden Formeln mittels Induktion:

(a) **(∗)** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ für alle natürlichen Zahlen n.

(c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

(d) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.5. Induktionsbeweis

Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

1.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wählen Sie die richtige Aussagen.

- **(i)** Seien A und B mathematische Aussagen. Dann ist $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ immer wahr.
- **(ii)** Seien A und B mathematische Aussagen. Dann ist $(A \vee (\neg A \wedge B)) \Leftrightarrow (A \vee B)$ immer wahr.

(b) Welches ist die Negation dieser Aussage: “Es regnet und ich habe keinen Regenschirm”?

- **(i)** Es regnet nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(ii)** Es regnet nicht und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Es regnet nicht, daher habe ich keinen Regenschirm.

(c) Welches ist das Kontraponierte dieser Aussage: “Wenn es regnet und ich keinen Regenschirm habe, werde ich nass”?

- **(i)** Wenn es nicht regnet, werde ich nicht nass und ich habe keinen Regenschirm.
- **(ii)** Wenn ich nass werde, regnet es und ich habe keinen Regenschirm.
- **(iii)** Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht oder ich habe einen Regenschirm.
- **(iv)** Wenn ich einen Regenschirm habe, regnet es nicht und ich werde nicht nass.

(d) Welche ist die Negation dieser Aussage: “10 ist gerade und ist kleiner oder gleich 11.” ?

- **(i)** 10 ist nicht gerade.
- **(ii)** 10 ist grösser als 11.
- **(iii)** 10 ist nicht gerade oder ist grösser als 11.
- **(iv)** 10 ist nicht gerade, deshalb ist es grösser als 11.