Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

2.1. Mengen, Mengenoperationen

(a) Vereinfachen Sie die Beschreibung der folgenden Mengen:

$$X := \left\{1, 2, 1+1\right\}, \qquad Y := \left\{0 \cdot n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0\right\}, \qquad Z := \left\{n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, n > 0 \wedge n \leq 3\right\}$$

(b) **(∗)** Bestimmen Sie den Durchschnitt $X \cap Y$, die Vereinigung $X \cup Y$ und die Differenz $X \setminus Y$ für die Mengen

$$X := \{0, 1\}, \qquad Y := \{1, 2\}.$$

Ist X eine Teilmenge von Y? Warum?

(c) **(∗)** Bestimmen Sie das kartesisches Produkt $X \times Y$ und die kartesischen Potenzen Y^2, Z^3 für die Mengen

$$X := \left\{\text{Apfel}, \text{Haus}\right\}, \qquad Y := \{0, 1, 2\}, \qquad Z := \{0, 1\}.$$

(d) Zeichnen Sie die Menge

$$S := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0 \wedge x \leq y \wedge y \leq 1\right\}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \ldots, n$ bezeichnen wir mit x_i die i-te Koordinate von x. Es gilt also $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Wir definieren die euklidische Norm von x als

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1}$$

Wir fixieren jetzt die Grundmenge $X := \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die Mengen

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| \leq 1\right\}, \qquad A^{\complement} = X \setminus A, \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| = 1\right\},$$
$$C := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 \geq 0\right\}, \qquad A \cap C, \qquad A \cup C.$$

2.2. Mengenoperationen Sei X eine Grundmenge.

(a) Sei $P(x)$ eine Aussageform für eine Variable $x \in X$. Überlegen Sie sich, dass gilt:

$$\left\{x \in X \,\middle|\, P(x)\right\}^{\complement} = \left\{x \in X \,\middle|\, \neg P(x)\right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Beispiel $X := \{0, 1\}$, $P(x)$:="$x = 0$".

Seien jetzt $A, B \subseteq X$ Teilmengen.

(b) **(∗)** Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$(A \cap B)^{\complement}, \qquad A^{\complement} \cup B^{\complement}.$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(c) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$(A \cup B)^{\complement}, \qquad A^{\complement} \cap B^{\complement}.$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(d) *Beweisen* Sie die de-morganschen Gesetze:

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement},$$
$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}.$$

Hinweis: Verwenden Sie (a) und die folgenden logischen Äquivalenzen (demorgansche Gesetze für Aussagen):

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \tag{2}$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{3}$$

(Siehe eine Aufgabe in Serie 1 (Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz).) Seien jetzt A, B, C Mengen.

(e) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$A \cap (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(f) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für die Mengen

$$A \cup (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Überzeugen Sie sich durch Ihre Zeichnung, dass die beiden Mengen gleich sind.

(g) *Beweisen* Sie die Distributivgesetze für Mengen:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden logischen Äquivalenzen (Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$):

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \tag{4}$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \tag{5}$$

(Siehe eine Aufgabe in Serie 1 (Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz).)

2.3. Quantoren

(a) Was bedeutet jede der folgenden Aussage? Ist sie wahr?

1) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \leq 1 \vee n > 1$
2) $\forall x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 1 \vee x > 1$
3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x \neq \frac{p}{q}$

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren.

1) 24 ist keine Quadratzahl.
2) **(∗)** Zu jeder reellen Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die grösser als die gegebene Zahl ist.

Bemerkungen:

- 1) und 2) sind wahr.
- 2) ist das *archimedische Prinzip*.

2.4. Quantoren und Negation Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr ist. Formulieren Sie ihre Verneinung mittels Quantoren so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Schreiben Sie die verneinte Aussage in Wörtern ohne mathematische Zeichen auf.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n < n^2$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \leq 1 \vee n > 1$

(c) **(∗)** $\forall x \in (0, \infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

(d) P:="$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} < x$"

2.5. Funktion Zeichnen Sie jedes der folgenden Tripel $f := (X, Y, G)$. Überprüfen Sie, ob es eine Funktion ist. (Ihre Zeichnung kann Ihnen dabei helfen.)

(a) $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \Big\{(x, e^x) \,\Big|\, x \in \mathbb{R}\Big\}$, $f := (X, Y, G)$

(b) $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \Big\{(y^2, y) \,\Big|\, y \in \mathbb{R}\Big\}$, $f := (X, Y, G)$

(c) $X := [0,\infty)$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \Big\{(y^2, y) \,\Big|\, y \in \mathbb{R}\Big\}$, $f := (X, Y, G)$

(d) **(∗)** $X := [0,\infty)$, $Y := \mathbb{R}$, $G := \Big\{(y^2, y) \,\Big|\, y \in [0,\infty)\Big\}$, $f := (X, Y, G)$

2.6. Bild, Urbild

(a) Bestimmen Sie das Bild jeder der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f(x) := x^2 \\ & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g(x) := x^3 \\ (*) \quad & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && h(x) := e^x \end{aligned}$$

Tipps für f:

- Zeichnen Sie f.
- Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung eine Vermutung darüber auf, welche Menge S gleich dem Bild $\mathrm{im}(f)$ ist.
- Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie zeigen, dass $\mathrm{im}(f) \subseteq S$ und $S \subseteq \mathrm{im}(f)$.

  Tipps für $S \subseteq \mathrm{im}(f)$:

  – Verwenden Sie den Zwischenwertsatz[1]:

    Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(a) \leq f(b)$, und $y \in \Big[f(a), f(b)\Big]$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$, sodass $f(x) = y$.

  – Falls $y \geq 1$, dann ist $y \in \Big[f(0), f(y)\Big]$.

[1] Dieser Satz wird später in der Vorlesung behandelt.

Tipp für g: Verwenden Sie ein ähnliches Argument.

Tipp für h: Verwenden Sie ein ähnliches Argument sowie die Ungleichheit

$$y \leq h(y),\ \forall y \in [0, \infty).$$

Betrachten $h((-\infty, 0))$ und $h([0, \infty))$ separat.

(b) Wir schreiben $(a, b) =]a, b[$ für das offene Intervall von a bis b. Bestimmen Sie für die obigen Funktionen die folgenden Urbilder:

(∗) $f^{-1}((-1, 4))$,
$g^{-1}([-8, -1])$,
$h^{-1}([-1, 1])$

2.7. Injektivität, Surjektivität, Bijektivität Zeigen Sie Folgendes:

(a) Wir definieren $X := \mathbb{N}_0$, $Y := \left\{m \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, m \text{ ist gerade}\right\}$ und $f : X \to Y$, $f(n) := 2n$. Diese Funktion ist bijektiv.

(b) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, ist injektiv und nicht surjektiv.

(c) Wir definieren $X := \mathbb{R}$, $Y := [0, \infty)$, $f : X \to Y$, $f(x) := x^2$. Diese Funktion ist nicht injektiv, aber surjektiv.

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.

(e) **(∗)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$, ist bijektiv.

(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) := e^{2x}$, ist bijektiv.

2.8. Umkehrfunktion Für f gegeben durch (a), **(∗)** (e),(f) bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} = f^{\langle -1 \rangle}$.

2.9. Verknüpfung von Funktionen

(a) **(∗)** Wir betrachten die Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2, \qquad g(y) := e^y.$$

Bestimmen Sie die verknüpften Funktionen

$$g \circ f, \qquad f \circ g.$$

(b) Wir bezeichnen mit $\|\|$ die euklidische Norm. (Siehe (1).) Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) := \|x\|, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) := e^y.$$

Wir kürzen ab $f(x_1, x_2) := f((x_1, x_2))$, für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

$$g \circ f, \qquad g \circ f(1, 2).$$

Ist die Verknüpfung $f \circ g$ wohldefiniert (d. h. sinnvoll)?

2.10. Urbild, Bild und Mengenoperationen Seien X und Y Mengen und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

(b) Geben Sie ein Beispiel von f, A_1 und A_2, so, dass

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2).$$

2.11. Supremum und Infimum

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(∗)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1, 2] \right\}.$

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2, \infty) \right\}.$

2.12. Online-MC Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

Es ist bei jeder Aufgabe möglich, dass keine oder mehrere Antworten richtig sind.

(a) Wählen Sie die richtige Aussagen.

(i) Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $B \subset Y$ eine Teilmenge. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

(ii) Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

(b) Die Ungleichung $||x-2|-1| < 3$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu

(i) $x < 3$

(ii) $|x| < 3$

(iii) $0 < x < 2$

(iv) $-2 < x < 6$

(v) $-3 < x < 6$

(c) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(d) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(e) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^4$ ist

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.

(f) Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$. Was ist die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall a \in A, \exists b \in B, \text{ so dass } a \leq b$$

(i) $\forall a \in A, \forall b \in B\ a \leq b$.

(ii) $\forall a \in A\ \exists b \in B$ so dass $a > b$.

(iii) $\exists b \in B$ so dass $\forall a \in A\ a \leq b$.

(iv) $\exists a \in A$ so dass $\forall b \in B\ a > b$.

(v) $\exists a \in A,\ \exists b \in B$ so dass $a > b$.