Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

3.1. Element, Teilmenge Wir definieren die natürlichen Zahlen als

$$0 := \emptyset, \qquad 1 := \{0\}, \qquad 2 := \{0, 1\}, \qquad 3 := \{0, 1, 2\}, \qquad \ldots$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $1 \in \{1\}$

(b) $1 \subseteq \{1\}$

(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(e) Für jede Menge X gilt $\emptyset \subseteq X$.

3.2. reelle Zahl, Dedekind-Schnitt In dieser Aufgabe verwenden wir die Notationen aus der Vorlesung. Für jede rationale Zahl r bezeichnet $\mathbf{r}$ zum Beispiel die reelle Zahl (d. h. den Dedekind-Schnitt)

$$\mathbf{r} := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s > r \right\} \in \mathbb{R}.$$

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{3}. \tag{1}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (1) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t > 3$ die rationalen Zahlen

$$r := 1 + \frac{t-3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, \qquad s := 2 + \frac{t-3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (2) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.

- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t \in \mathbf{1}$ die rationalen Zahlen
$$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$
Zeigen Sie, dass $r, s \in \mathbf{1}$. Folgern Sie, dass in (2) die Inklusion $\supseteq$ gilt.

(c) Wir definieren
$$\sqrt{\mathbf{2}} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \right\}.$$
Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x besagt, dass
$$\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r.$$
Zu gegebenem $r \in x$ betrachten Sie $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

3.3. lesen Lesen Sie Abschnitt 2.2 (Die reellen Zahlen) im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe. Stellen Sie Fragen, falls Sie solche haben.

3.4. Supremum Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge. Ein Satz aus der Vorlesung besagt, dass A ein Supremum besitzt. Beweisen Sie diese Aussage im folgenden Fall:
$$\nexists r \in \mathbb{Q} : \; b = \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s \geq r \right\}, \tag{3}$$

$$\text{wobei} \quad b := \bigcap_{x \in A} x := \text{Durchschnitt aller } x \in A = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \forall x \in A : \; r \in x \right\}. \tag{4}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass b eine reelle Zahl, d. h. ein Dedekind-Schnitt ist. Überprüfen Sie dazu die Bedingungen in der Definition eines Dedekind-Schnittes. Für die Bedingung $b \neq \emptyset$ verwenden Sie zum Beispiel, dass A nach oben beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass b eine obere Schranke für A ist.
- Zeigen Sie, dass jede obere Schranke für A grösser gleich b ist.
- Folgern Sie daraus, dass A ein Supremum besitzt.

Die nächste Aufgabe wurde schon in Serie 2 gestellt. In der Zwischenzeit haben wir den zugehörigen Stoff behandelt.

3.5. Supremum und Infimum bestimmen

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(∗)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1, 2] \right\}$.

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2, \infty) \right\}$.

3.6. Supremum und Infimum der Menge $-A$ Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Wir definieren:

$$-A := \left\{ -a \,\middle|\, a \in A \right\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

3.7. Komplexe Zahlen Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a + bi$ mit a, b reell:

(a) **(∗)** $(3 + 2i)(6 - 5i)$

(b) **(∗)** $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1 + i)^2} + (1 + i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(g) $(1 + i)^6$ (*Hinweis*: Polarform verwenden)

3.8. Punktmengen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$

3.9. Polynome in $\mathbb{C}$

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Betrachten wir das Polynom

$$P(z) := az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine der Quadratwurzeln von $b^2 - 4ac$ (zur Erinnerung: falls $b^2 - 4ac \neq 0$ hat $b^2 - 4ac$ genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 in $\mathbb{C}$ und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P(\alpha_+) = 0$ und $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P(z) = a(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie daraus, dass α_+ und α_- die einzigen Nullstellen von P sind. (Bemerken Sie, dass möglicherweise $\alpha_+ = \alpha_-$, nämlich wenn $b^2 - 4ac = 0$.)

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomen:

a) $z^2 + 6z + 10$

b) $4z^2 + (4i)z - 1$

c) $(z^2 + 1)(z - 3i)^2$

3.10. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

- **(i)** 0
- **(ii)** 1
- **(iii)** 3
- **(iv)** 5

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2, 4[$$

- **(i)** Existiert nicht.
- **(ii)** 1
- **(iii)** 4
- **(iv)** $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c - 1| = 2 \right\}?$$

- **(i)** Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 2), (3, -2)$ und $(3, 2)$
- **(ii)** Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1, 0)$ zu $(3, 0)$
- **(iii)** Ein Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 2
- **(iv)** Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2