Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

**4.1. Gleichmächtigkeit** Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\mathbb{N}_0, \qquad \left\{\text{Quadratzahl}\right\} = \left\{0, 1, 4, 9, \dots\right\}$$

gleichmächtig sind.

**4.2. Komplexe Zahlen, cis-Funktion**

**(a)** **(∗)** Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $x + yi$ mit $x, y$ reell:

$$(1+i)^2, \quad (1+i)(1-i), \quad \frac{1}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

**Tipp** für die nächsten Zahlen: Verwenden Sei die Polarform.

$$(1+i)^{10}, \qquad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6$$

**(b)** Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

**(c)** Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{cis}(\varphi + \psi) = \operatorname{cis}(\varphi)\operatorname{cis}(\psi), \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$$

**(d)** Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{cis}\left(\frac{k}{2}\pi\right) = i^k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

**4.3. Punktmengen in $\mathbb{C}$** Skizzieren Sie die folgende Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

$$A := \left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2\right\}$$

**4.4. quadratisches komplexes Polynom** In der Vorlesung wurde der Fundamentalsatz der Algebra erwähnt, welcher besagt, dass jedes nicht konstante komplexe (oder reelle) Polynom (mindestens) eine komplexe Nullstelle besitzt. Im Fall eines quadratischen Polynoms gibt es für die Nullstellen eine Lösungsformel. Seien nämlich $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$.

**(a)** Was ist die Formel für die Nullstellen des Polynoms

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) := az^2 + bz + c?$$

**Tipp:** Die Formel ist die gleiche wie für reelle Polynome, ausser dass die Quadratwurzel einer komplexen Zahl zweideutig ist.

**(b)** Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:

1) $z^2 + 6z + 10$
2) $4z^2 + 4iz - 1$
3) $(z^2 + 1)(z - 3i)^2$

**4.5. Folgen, Konvergenz, Divergenz** Zeigen Sie das Folgende:

**(a)** **(∗)** Die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 0$.

**(b)** **(∗)** Die Folge $\left(a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 1$.

**(c)** Die Folge $\left(a_n := \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A := 1$.

**(d)** Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert.

**4.6. lesen** Lesen Sie das Folgende und stellen Sie Fragen, falls Sie solche haben:

**(a)** Abschnitt 2.4 *Der euklidische Raum* im Skript *Analysis für Informatik* von Prof. M. Struwe.

**(b)** 3.2 *Grenzwert einer Folge*, insbesondere Beispiele 3.2.1. iii), 3.2.2. iii,iv)

**4.7. Produkt von Folgen**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists\, C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

### 4.8. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

**(a)** **(∗)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

**(b)** **(∗)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

**(c)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

**(d)** $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sin(n)}{2^n}+\frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

***Hinweis:*** *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

Die folgende Aufgabe wird in der Vorlesung verwendet, um zu zeigen, dass die geometrische Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Fall $|z|<1$ gegen 0 konvergiert.

**4.9. Bernoullische Ungleichung** Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \qquad \forall x\in[-1,\infty),\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie diese Ungleichung.

**Tipp:** Verwenden Sie Induktion über $n$.

**4.10. Wurzelberechnung** Es sei $c\geq 1$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} a_1 &= c,\\ \forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

**(a)** Zeigen Sie, dass gilt:

$$1\leq a_n\leq c, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

**(b)** Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ folgende Ungleichung gilt:

$$a_n^2\geq c$$

**(c)** Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt:

$$a_n\geq a_{n+1}$$

**(d)** Argumentieren Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert $a$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$

Folgern Sie, dass $a^2 = c$.

**(e)** Für $c = 3$, berechnen Sie (mit dem Taschenrechner/Computer) $a_2, a_3, a_4$ und $a_5$. Wieviele Stellen nach dem Komma stimmen bei $a_5$ bereits mit $\sqrt{3}$ überein?

### 4.11. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

- **(i)** 0
- **(ii)** 1
- **(iii)** 3
- **(iv)** 5

**(b)** Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c-1| = 2 \right\}?$$

- **(i)** Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-2), (-1,2), (3,-2)$ und $(3,2)$
- **(ii)** Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1,0)$ zu $(3,0)$
- **(iii)** Ein Kreis mit Mittelpunkt $i$ und Radius 2
- **(iv)** Ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2

**(c)** Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3 + 100n + 1000000}{27n^3 + 10920n + 2020}$$

- **(i)** Divergiert, d.h. keine Konvergenz
- **(ii)** Konvergiert, mit Grenzwert 0
- **(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$
- **(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$
- **(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

**(d)** Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

**(i)** Divergiert, d.h. keine Konvergenz

**(ii)** Konvergiert, mit Grenzwert 0

**(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

**(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$

**(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 1

**(e)** Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

**(i)** Divergiert, d.h. keine Konvergenz

**(ii)** Konvergiert, mit Grenzwert 0

**(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$

**(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$

**(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 29