Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

5.1. Limes superior und inferior Bestimmen Sie:

(a) **(∗)** $\limsup_{k\to\infty}(-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(b) **(∗)** $\liminf_{k\to\infty}(-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(c) $\limsup_{k\to\infty} k\Big(1+(-1)^k\Big)$

(d) $\liminf_{k\to\infty} k\Big(1+(-1)^k\Big)$

5.2. Konvergenz und bestimmte Divergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$

(a) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ durch

$$a_n := \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n} \\ 2^{-n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Limes.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^d$ sowie die Konvergenz gewisser Folgen, die wir schon in der Vorlesung gezeigt haben.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert!

Tipps: Sei $\varepsilon \in (0,\infty)$. Zeigen Sie das Folgende:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

  $$(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

  Verwenden Sie hierfür einen Satz, den Sie aus dem Gymnasium kennen.

- Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $\dfrac{n_0-1}{2}\varepsilon^2 \geq 1$.

  Sei jetzt $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $n \geq n_0$.

- Es gilt $(1+\varepsilon)^n \geq n$.

Zeigen Sie jetzt, dass $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}_0} \to 1$, indem Sie die folgende Tatsache verwenden:

$$\forall x, y \in [0,\infty), n \in \mathbb{N} : x^n \geq y^n \Rightarrow x \geq y. \tag{1}$$

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie (1). Sie dürfen dazu verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein (total) geordneter Körper ist, d. h. die Eigenschaften A.i)-iv), M.i)-iv), D), O.i)-iv), K.i),ii) in Abschnitt 2.2 im Skript von Prof. M. Struwe besitzt.

(c) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Tipps:

- Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

  $$(2k)! \geq k^k, \qquad (2k+1)! \geq (k+1)^{k+1}.$$

- Zeigen Sie damit, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

  $$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

- Zeigen Sie damit, dass $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

5.3. Konvergenz einer Reihe Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren:

(a) **(∗)** die zur Folge $\left(\frac{(k!)^2}{(2k)!}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k!)^2}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Tipp: Verwenden Sie das Quotientenkriterium.

(b) die zur Folge $\left(\frac{k!}{k^k}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe

Tipp: Verwenden Sie das Quotientenkriterium.

(c) **(∗)** die zur Folge $\left(k^p z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, wobei $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| < 1$, und $p \in \mathbb{N}$

Tipp: Verwenden Sie das Wurzelkriterium und Aufgabe 5.2(b)!

(d) die zur Folge $\left(a_k := \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe

Tipp: Verwenden Sie ein Konvergenz-Kriterium aus der Vorlesung.

5.4. Cauchy-Kriterium für Konvergenz einer Folge, harmonische Reihe divergiert, ζ-Reihe

(a) **(∗)** Wir definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_k := \begin{cases} 3^{-k}, & \text{falls } 4|k, \\ -3^{-k}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie das Cauchy-Kriterium.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Formulieren die Verneinung der Aussage, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist, so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Verwenden Sie dazu Quantoren.

(c) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe keine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung: Wir haben uns das schon in der Vorlesung überlegt. Das Ziel dieser Aufgabe ist, diese Überlegungen zu präzisieren.

(d) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(e) Wir definieren die *ζ-Reihe* für $s \in \mathbb{R}$ als die zur Folge $\left(a_k := \frac{1}{k^s}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, d. h. die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass für jedes $s \in (-\infty, 1]$ die ζ-Reihe für s divergiert.

5.5. Konvergenzradius einer Potenzreihe Berechnen Sie den zur Koeffizientenfolge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörigen Konvergenzradius, d. h. den Konvergenzradius der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

(a) $c_k := 1$ (Das entspricht der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also der geometrischen Reihe.)

(b) **(∗)** $c_k := \dfrac{1}{k^k}$

(c) $c_k := \dfrac{k!}{k^k}$

(d) $c_k := k^p$ für $p \in \mathbb{N}$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 5.2(b)

(e) **(∗)** $c_k := \dfrac{1}{k!}$ (Das entspricht der Potenzreihe $z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also der Exponentialreihe.)

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 5.2(c).

(f) Konvergiert die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k^k}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

(g) Gibt es ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| > 1$ und die geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert?

(h) **(∗)** Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

5.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k+1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k+2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k+3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sup_{k\geq n} a_n$, monoton fallend und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \inf_{k\geq n} a_n$, monoton wachsend.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Die Harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist

(i) Konvergent

(ii) Divergent