Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

6.1. Konvergenz und Grenzwert von Reihen, Cauchy-Produkt

(a) Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch die folgende Tabelle:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\varphi(j)$	0	1	2	4	3	5	6	8	10	7	9	11	...

(1 gerade Zahl, 1 ungerade Zahl, 2 gerade Zahlen, 2 ungerade Zahlen, 3 gerade Zahlen, 3 ungerade Zahlen, ...) Zeigen Sie, dass die zur Folge $\left(2^{-\varphi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(b) **(∗)** Sei $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass die zur Folge $\left((k+1)z^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe gegen $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ konvergiert.

Tipps: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe für z mit sich selbst. Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

6.2. Eulersche Zahl und Exponentialfunktion

Erinnern Sie sich, dass die Eulersche Zahl definiert ist durch

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und dass die Exponentialfunktion definiert ist durch

$$\exp := \mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass

$$e = \exp(1).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei

$$a_k^{(n)} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot(n-k+1)}{n^k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 \le a_k^{(n)} \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$, und dass für fixes $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}.$$

Schliessen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1).$$

Hinweis: *Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz.*

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: $\exists\, n_\varepsilon^0, n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, mit $n_\varepsilon^0 \leq n_\varepsilon^1$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \exp(1) - \varepsilon,$$

und $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$

$$\left|\exp(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < 2\varepsilon.$$

(e) Schliessen Sie, dass

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1).$$

6.3. Stetigkeit

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir definieren die *Projektion auf die i-te Koordinatenachse* als die Funktion

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{pr}_i(x) := x_i.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung stetig ist.

(b) **($*$)** Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \exp\Big(x \cos\Big(\sin(x) + x\Big)\Big).$$

Tipps: Verwenden Sie Sätze und Beispiele aus der Vorlesung.

(c) Zeigen Sie dass Addition komplexer Zahlen, d. h. die Abbildung $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, stetig ist.

(d) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Seien $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$, $S'' \subseteq \mathbb{R}^{n''}$, $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$ Funktionen und $x_0 \in S$ ein Punkt, sodass f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist. Dann ist die verknüpfte Funktion $g \circ f : S \to S''$ in x_0 stetig.

Tipp: Verwenden Sie die Definition der Stetigkeit (Weierstraßsches (ε, δ)-Kriterium).

Bemerkung: Dieser Satz wurde in der Vorlesung behandelt.

6.4. Inneres

Bestimmen Sie das Innere jeder der folgenden Mengen:

(a) $\mathbb{R}^n$

(b) $\emptyset$

(c) $\{0\}$

(d) **(∗)** abgeschlossener Ball $\overline{B}^n_r(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0, \infty)$

(e) $\mathbb{Q}$

Welche dieser Mengen sind offen?

6.5. abgeschlossener Ball (∗) Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Ball abgeschlossen ist.

Tipps:

- Machen Sie eine Zeichnung.
- Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

Die folgende Aufgabe werden wir verwenden, um Aufgabe 6.7 zu lösen.

6.6. De Morgansche Gesetze Zeigen Sie die De Morganschen Gesetze, welche das Folgende besagen:

1. Das Komplement eines Durchschnittes von Mengen ist gleich der Vereinigung der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \left(A^{\complement}\right), \qquad A^{\complement} := X \setminus A.$$

2. Das Komplement einer Vereinigung von Mengen ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcup \mathcal{A}\right)^{\complement} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \left(A^{\complement}\right).$$

Tipp: Schreiben Sie die Mengen unter Verwendung von Quantoren und der Negation. Verwenden Sie die Regeln für logische Aussagen und Quantoren, insbesondere die Regeln für die Negation.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Aussage eines Korollars in der Vorlesung (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

6.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
2. Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen [1] ist abgeschlossen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften offener Mengen) sowie Aufgabe 6.6.

[1] Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion (=Menge) von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

6.8. Abschluss Bestimmen Sie den Abschluss jeder der folgenden Mengen:

(a) **(∗)** offener Ball $B_r^n(x_0)$ für $r \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Tipp: Argumentieren Sie analog zum Beispiel der Menge $]0, 1]$, das in der Vorlesung behandelt wurde.

(b) $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\mathbb{Q}$

6.9. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei

$$A := \left\{1 - \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}$

(ii) $\overline{A} = A$

(iii) $\overline{A} = A \cup \{1\}$

(iv) $\overline{A} = [0, 1]$

(b) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(c) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| \leq x^3\right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < x^3\right\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(iv) $\overline{A} = A \cup \{(0, 0)\}$