Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

7.1. offene Mengen

(a) Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N} : |x - n| < \frac{1}{n} \right\}$$
$$U' := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\|x - (1,0)\right\| < 2 \wedge \left\|x - (-1,0)\right\| < 2 \right\}$$

(b) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Mengen U und U' offen sind.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Die folgenden drei Aufgaben wurden teilweise schon in Serie 6 gestellt. Inzwischen haben wir den entsprechenden Stoff in der Vorlesung behandelt.

7.2. abgeschlossene Mengen

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Ball abgeschlossen ist.

Tipps:

- Machen Sie eine Zeichnung.
- Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

(b) Zeichnen Sie die folgende Menge:

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\|x - (1,0)\right\| \leq 2 \vee \left\|x - (-1,0)\right\| \leq 2 \right\}$$

(c) Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq b$. Zeigen Sie, dass das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, indem Sie das Folgenkriterium für Abgeschlossenheit verwenden.

Tipp: Verwenden Sie auch, dass die Ordnung zwischen zwei reellen Zahlenfolgen im Limes erhalten bleibt. Das bedeutet Folgendes: Seien $A, B \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen A konvergiert, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen A konvergiert. Wir nehmen an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $a_n \leq b_n$. Dann gilt $A \leq B$.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Aussage eines Korollars in der Vorlesung (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

7.3. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
2. Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen [1] ist abgeschlossen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften offener Mengen) sowie eine Aufgabe aus Übungsserie 6 (De Morgansche Gesetze).

7.4. Abschluss Bestimmen Sie den Abschluss jeder der folgenden Mengen:

(a) **($*$)** offener Ball $B_r^n(x_0)$ für $r \in (0, \infty)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Tipp: Argumentieren Sie analog zum Beispiel der Menge $]0, 1]$, das in der Vorlesung behandelt wurde.

(b) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\mathbb{Q}$

7.5. Rand Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen ihren Rand:

(a) $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\mathbb{Q}$

Tipp: Verwenden Sie Aufgaben aus Serie 6 und 7, in denen das Innere und der Abschluss dieser Mengen teilweise bestimmt wurde.

[1] Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion (=Menge) von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

7.6. Konvergenz und Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Bestimmen Sie für jede der unteren Funktionen das Folgende:

1. ob sie an der angegebenen Stelle x_0 konvergiert
2. den Grenzwert im Fall von Konvergenz
3. ob die Funktion an der Stelle x_0 stetig ist im Fall, dass die Funktion in diesem Punkt definiert ist

(a) **(∗)** $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\qquad x_0 := 0$

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) := e^{-\frac{1}{x}}$, $\qquad x_0 := 0$

(c) halbe Buckelfunktion:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}, \qquad x_0 := 0$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2$, $\qquad x_0 := (1, 0)$

Für $i = 1, 2$ bezeichnet hier x_i die i-te Komponente von x.

(e) $g \circ f$, wobei f wie in (d) und g wie in (c) definiert sind, $x_0 := (1, 0)$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$, $\qquad x_0 := 0$

(g) charakteristische Funktion der rationalen Zahlen,

$$f := \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x_0 := \sqrt{2}$$

7.7. Kompaktheit Bestimmen Sie für jede Menge, ob sie kompakt ist:

(a) $\emptyset$

(b) $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\|x - (1,0)\right\| \leq 2 \vee \left\|x - (-1,0)\right\| \leq 2\right\}$

Tipp: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

(c) **($*$)** die Sphäre $S_r^{n-1}(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0,\infty)$

(d) $\mathbb{Z}$

(e) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

(f) $\left\{\left(e^x, \cos(x)\right) \,\middle|\, x \in [0,1]\right\}$

7.8. ($*$) Maximum und Minimum einer Funktion Wir betrachten die Funktion

$$f : \overline{B}_1^2(0) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{x_1} + x_2.$$

Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Tipp: Verwenden Sie Resultate aus der Vorlesung.

7.9. Mittels (Un-)gleichungen definierte Mengen

Tipp für (a) und (b): Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von Stetigkeit mittels (relativ) offener und abgeschlossener Mengen).

(a) **($*$)** Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x < 2\right\}$$

offen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abgeschlossen sind:

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x \leq 2\right\}$$
$$B := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x = 2\right\}$$
$$C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^4 + x + y^4 + y = 1\right\}$$

(c) Zeigen Sie, dass A, B und C kompakt sind.

(d) Ist die Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^3 + x + y^3 + y = 1\right\}$$

kompakt?

7.10. Umgebung eines Punktes

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := [0,1]$ eine Umgebung des Punktes $x_0 := 1$ in (= relativ zu) $X :=]-1,1]$ ist.

(b) Ist $[0,1]$ eine Umgebung des Punktes $x_0 := 1$ in $\mathbb{R}$?

(c) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leq x^5 + x \leq 1\right\}$$

eine Umgebung des Punktes $x_0 := 0$ in $\mathbb{R}$ ist.

7.11. (∗) Bild einer Funktion, Zwischenwertsatz Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^5 + x + 1.$$

Zeigen Sie, dass das Bild von f gegeben ist durch $\operatorname{im}(f) = [1,\infty)$.

Tipp: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

7.12. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede stetige, surjektive Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist monoton.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \to]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Ist die folgende Funktion stetig?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) := \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(i) Ja

(ii) Nein