Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

9.1. Differenzierbarkeit, Ableitungen, Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Umkehrsatz Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen differenzierbar ist. Berechnen Sie ihre Ableitung.

(a) **(∗)** (reelle Exponentialfunktion) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Tipps:

- Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{Q}(h)$ den verschobenen Differenzenquotienten [1] von exp zu x_0, ausgewertet in h. Schreiben Sie $\widetilde{Q}(h)$ mittels des Additionstheorem für die Exponentialfunktion als

$$\widetilde{Q}(h) = \exp(x_0)(1 + a_h h), \qquad a_h := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^\ell}{(\ell+2)!}.$$

- Schätzen Sie $|a_h|$ durch eine geometrische Reihe nach oben ab.
- Zeigen Sie, dass $\widetilde{Q}(h) \to \exp(x_0)$ für $h \to 0$.

(b) **(∗)** (Produkt) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := xe^x$

Tipp: Leibnizregel = Produktregel

(c) (Produkt) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x \log x$

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der natürliche Logarithmus $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung gegeben durch eine bestimmte Funktion. Sie dürfen das verwenden.

Tipp: Leibnizregel = Produktregel

(d) **(∗)** $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \dfrac{x+1}{x-1}$

Tipp: Quotientenregel

(e) (Potenzfunktion) $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Induktion

[1] siehe Vorlesung

- Für $n = 1$ ist $p_1 = \mathrm{id}$ linear, also affin. Wir haben diesen Fall schon in der Vorlesung behandelt.
- Wenn Sie den allgemeinen Fall zu schwierig finden, betrachten Sie dann zuerst die Fälle $n = 2, 3$.

(f) (Polynom) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Tipps:

- Teilaufgabe (e)
- Produkt- und Summenregel für Differenzierbarkeit und Ableitungen
- Induktion
- Wenn Sie den allgemeinen Fall zu schwierig finden, betrachten Sie dann zuerst das Polynom $p(x) := 2x^2 + x$.

(g) (Potenzfunktion mit negativem Exponenten) $p_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p_{-n}(x) := x^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Teilaufgabe (e)
- Quotientenregel

(h) $\tan := \dfrac{\sin}{\cos} : U \to \mathbb{R}$, wobei

$$U := \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \right\}$$

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Kosinus- und die Sinusfunktion differenzierbar sind mit Ableitungen gegeben durch bestimmte Funktionen.

Tipp: Verwenden Sie eine Rechenregel für Ableitungen.

(i) **(∗)** (gaußsche Glockenfunktion) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tipp: Kettenregel

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{e^{e^x}} := e^{\left(e^{(e^x)}\right)}$

Tipp: Kettenregel

(k) (Exponentialfunktion zur Basis $b \in]0,\infty[$) $:= \exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_b(x) := b^x := \exp\Big(x\log(b)\Big) = e^{x\log(b)}$

Tipps:

- Kettenregel
- Leibnizregel = Produktregel
- Teilaufgabe (a)

(l) **($*$)** n-te Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\ } :]0,\infty[\to]0,\infty[$ für $n \in \mathbb{N}$

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (e)

(m) **($*$)** (Logarithmus zur Basis $b \in]1,\infty[$) $:= \log_b := \exp_b^{-1} := \exp_b^{\langle -1\rangle} : \mathrm{im}(\exp_b) =]0,\infty[\to \mathbb{R}$

Überlegen Sie sich zuerst, dass $\exp_b : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist.

Bemerkung: Sie dürfen dazu verwenden, dass $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist.

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (k)

(n) *Arkustangens* := (Umkehrfunktion des Tangens $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$) $= \arctan := \tan^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Überlegen Sie sich zuerst, dass $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Tipps:

- Umkehrsatz
- Teilaufgabe (h)
- Schreiben Sie $\tan'$ in der Form $\tan' = \varphi \circ \tan$ für eine bestimmte Funktion φ.

9.2. Anwendungen des Mittelwertsatzes: strenge Monotonie, gewöhnliche Differentialgleichung

(a) **(∗)** (Ableitung in einem Punkt) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{x^2} = e^{(x^2)}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x_0 \in]0,1[$ gibt, sodass $f'(x_0) = e - 1$.

Frage: Können Sie ein solches x_0 berechnen?

Tipp: Falls nicht, verwenden Sie dann einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass es einen Punkt x_0 gibt, sodass $f'(x_0)$ eine bestimmte Gleichung erfüllt.

(b) **(∗)** (strenge Monotonie) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Potenzfunktion $p_{-n} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $p_{-n}(x) := x^{-n}$, streng monoton fallend ist.

Tipps:

- Korollar zum Mittelwertsatz (verschwindende Ableitung impliziert Konstanz, positive Ableitung strenges Wachstum)
- Aufgabe 1(g)

(c) (gewöhnliche Differentialgleichung) Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir $p_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$. Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass

$$f' = p_{-1}f, \qquad \text{d. h.} \qquad f'(x) = \frac{f(x)}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$f = f(1)p_1 \qquad \text{d. h.} \qquad f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tipp: Argumentieren Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung (Mittelwertsatz, gewöhnliche Differentialgleichung). (Wir haben dort ein Korollar zum Mittelwertsatz angewendet.)

9.3. Konvergenz des Quotienten zweier Funktionen, "unbestimmter Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$", Regel von Bernoulli-de l'Hospital Für jede der folgenden Funktionen $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zeigen Sie, dass h an der Stelle $x_0 := 0$ von rechts konvergiert und berechnen Sie $\lim_{x \searrow 0} h(x)$.

Tipp: Versuchen Sie, eine der folgenden Methoden anzuwenden:

- Definition der Ableitung
- Quotientenregel für Konvergenz von Funktionen an einer Stelle:

  Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$, sodass f und g an der Stelle x_0 gegen y_0 und z_0 konvergieren und $z_0 \neq 0$. Dann konvergiert $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 gegen $\frac{y_0}{z_0}$.
- Regel von Bernoulli-de l'Hospital

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass die Kosinus- und die Sinusfunktion differenzierbar sind mit Ableitungen gegeben durch bestimmte Funktionen.

(a) **(∗)** $h(x) := \dfrac{\sin x}{x}$

(b) **(∗)** $h(x) := \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(c) **(∗)** $h(x) := \dfrac{x}{\sin x}$

(d) $h(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(e) $h(x) := \dfrac{x^2}{e^x - x - 1}$

(f) $h(x) := \dfrac{\cos x}{1+x}$ (Wir definieren diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.)

(g) $h(x) := \dfrac{\cos x - 1}{x}$

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ und $\tanh(x)$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benutzen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I_f bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\operatorname{arsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \operatorname{arcosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \operatorname{artanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arsinh, arcosh und artanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arsinh, arcosh und artanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen arsinh, arcosh und artanh.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Sei

$$f := \sin \circ \cos \circ \sin := \sin \circ (\cos \circ \sin) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) $f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

(ii) $f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

(iii) $f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

(iv) $f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$

(b) Welche der folgenden Ableitungen sind korrekt? (Mehrere Antworten können korrekt sein)

(i) $\frac{d}{dx}\log(2x) = 2\log(x)\frac{1}{x}, \ \forall x \in]0, \infty[$

(ii) $(\exp \circ \sin)' = (\exp \circ \sin)\cos$

(iii) $\left(\sqrt{\ } \circ \sin\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an jeder Stelle in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Weiter sei $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Dann existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f'(x) = 1$.

(i) Wahr

(ii) Falsch