Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

Die folgende Aufgabe ist Teil einer Proposition in der Vorlesung.

10.1. hyperbolische Funktionen Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\cosh(x) = \operatorname{Cos}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tipp: Verwenden Sie die eulersche Formel für komplexe Zahlen und die Identitäten $\operatorname{Cos}(-z) = \operatorname{Cos} z$, $\operatorname{Sin}(-z) = -\operatorname{Sin} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $i \sinh(x) = \operatorname{Sin}(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tipp: Siehe (a).

(c) ("hyperbolischer Pythagoras") $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) (Additionstheorem für cosh) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(e) (Additionstheorem für sinh) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

10.2. höhere Differenzierbarkeit und Ableitungen (∗) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die n-te Potenzfunktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$. Zeigen Sie, dass p_n für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ k mal differenzierbar ist und berechnen Sie seine k-te Ableitung.

Tipps:

- Aufgabe aus der Vorlesung, die besagt, dass p_n differenzierbar ist und die eine Formel für die Ableitung von p_n angibt.
- Induktion

10.3. Polynom, rationale Funktion, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion glatt Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen glatt sind.

Tipps: Verwenden Sie:

- jeweils ein Beispiel aus der Vorlesung, gemäss dem die Funktion differenzierbar ist und das eine Formel für die Ableitung liefert
- Induktion

(a) jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) die rationale Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ für jedes Paar von reellen Polynomen $p, q \not\equiv 0$ und $U := q^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$

(c) **($*$)** die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) die trigonometrischen Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die folgende Aufgabe ist Teil eines Satzes, der in der Vorlesung behandelt wurde.

10.4. Ableitungen von Kosinus und Sinus, durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar ($*$) Wir definieren

$$\begin{gathered} \mathrm{Cos}, \mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\ \mathrm{Cos}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}, \quad \mathrm{Sin}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}. \end{gathered}$$

Zeigen Sie, dass die eingeschränkten Funktionen $\mathrm{Cos}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Sin}|_{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind mit Ableitungen

$$(\mathrm{Cos}|_{\mathbb{R}})' = -\mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}}, \qquad (\mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}})' = \mathrm{Cos}|_{\mathbb{R}}.$$

Tipp: Verwenden Sie ein Korollar aus der Vorlesung (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise differenzierbar).

Bemerkung: In den Vorlesungsnotizen wird die Aussage auf eine andere Weise bewiesen. Wir zeigen dazu mittels der Definition, dass die Funktion $\mathrm{Exp}(i\bullet) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Ableitung $i\,\mathrm{Exp}(i\bullet)$ und verwenden die eulersche Formel.

10.5. Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe, Abschätzung des Fehlers

(a) Wir betrachten das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + x + x^2 + x^3$.

1) **($*$)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{f,x_0=0}$ von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$, für $m = 0, \ldots, 4$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^{m=1}_{f,x_0=0}$.
3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Polynom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Berechnen Sie $T^m_{f,x_0=0}$, das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^m_{f,x_0=0}$.

3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(c) 1) **($*$)** Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{\sin, x_0=0}$.

Tipp: Verwenden Sie, dass $\sin = \operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ und dass $\operatorname{Sin}|_{\mathbb{R}}$ der punktweise Limes einer Potenzreihe ist.

2) **($*$)** Bestimmen Sie die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

3) Zeichnen Sie sin auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Zeichnen Sie $T^1_{\sin,0}$ und $T^3_{\sin,0}$.

5) Was können Sie über den Fehler der Taylornäherung in diesem Beispiel aus Ihrer Zeichnung ablesen?

6) **($*$)** Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig gegen sin konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe).

7) **($*$)** Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in]0, \infty[$ einen Punkt $\xi \in]0, \infty[$ gibt, sodass

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin \xi}{24} x^4.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform).

8) **($*$)** Zeigen Sie, dass der Fehler der Taylornäherung für sin dritter Ordnung um $x_0 = 0$, also das Restglied $R^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - T^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{24}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{5}{6}$ den Wert $\sin 1$ mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{24}$ nähert, d. h.

$$\left|\sin 1 - \frac{5}{6}\right| \leq \frac{1}{24}.$$

10) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ ein $\delta \in]0,\infty[$ gibt, sodass gilt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \varepsilon |x|^3, \qquad \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Tipp: Teilaufgabe (c) 8)

Bemerkung: Das bedeutet, dass $T^3_{\sin, x_0=0}$ die Funktion sin in dritter Ordnung um $x_0 = 0$ nähert.

11) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{\sin, x_0=\frac{\pi}{2}}$.

(e) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{f, x_0=0}$.

10.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + x^3$

(ii) $1 + x + x^2 + x^3$

(iii) $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

(i) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$

(ii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4$

(iii) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4$

(iv) $(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^4$

(c) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^2$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^4$