Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

Die folgende Aufgabe wurde schon in Übungsserie 10 gestellt. In der Zwischenzeit haben wir in der Vorlesung den ganzen Stoff behandelt, der in dieser Aufgabe verwendet wird.

11.1. Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe, Abschätzung des Fehlers

(a) Wir betrachten das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + x + x^2 + x^3$.

1) (∗) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{f,x_0=0}$ von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$, für $m = 0, \dots, 4$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^{m=1}_{f,x_0=0}$.
3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Polynom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Berechnen Sie $T^m_{f,x_0=0}$, das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.
2) Berechnen Sie das Restglied $R^m_{f,x_0=0}$.
3) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(c)
1) (∗) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{\sin,x_0=0}$.

   Tipp: Verwenden Sie, dass $\sin = \mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}}$ und dass $\mathrm{Sin}|_{\mathbb{R}}$ der punktweise Limes einer Potenzreihe ist.
2) (∗) Bestimmen Sie die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.
3) Zeichnen Sie sin auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4) Zeichnen Sie $T^1_{\sin,0}$ und $T^3_{\sin,0}$.
5) Was können Sie über den Fehler der Taylornäherung in diesem Beispiel aus Ihrer Zeichnung ablesen?
6) (∗) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von sin zum Entwicklungspunkt $x_0 := 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig gegen sin konvergiert.

   Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe).

7) **(∗)** Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in]0,\infty[$ einen Punkt $\xi \in]0,\infty[$ gibt, sodass

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin \xi}{24} x^4.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform).

8) **(∗)** Zeigen Sie, dass der Fehler der Taylornäherung für sin dritter Ordnung um $x_0 = 0$, also das Restglied $R^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - T^3_{\sin,x_0=0}(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \frac{x^4}{24}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{5}{6}$ den Wert $\sin 1$ mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{24}$ nähert, d. h.

$$\left|\sin 1 - \frac{5}{6}\right| \le \frac{1}{24}.$$

10) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ ein $\delta \in]0,\infty[$ gibt, sodass gilt:

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \varepsilon |x|^3, \qquad \forall x \in [-\delta,\delta].$$

Tipp: Teilaufgabe 8) 8)

Bemerkung: Das bedeutet, dass $T^3_{\sin,x_0=0}$ die Funktion sin in dritter Ordnung um $x_0 = 0$ nähert.

11) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{\sin,x_0=\frac{\pi}{2}}$.

(e) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^2_{f,x_0=0}$.

11.2. kritische Punkte, Extremalstellen Wir betrachten die Funktion

$$f : I := \left[-\frac{3}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 - 3x.$$

(a) Zeichnen Sie f.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Einschränkung von f auf das offene Intervall $\left]-\frac{3}{2}, 3\right[$.

(c) Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt.

(d) **(∗)** Bestimmen Sie die Extremalstellen und die Extrema von f.

Hinweis: Die Kandidaten für Extremalstellen sind die Endpunkte von I und die kritischen Punkte von f im Innern von I. (Warum?)

(e) Verbessern Sie Ihre Zeichnung von f.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (d).

(f) Wir schreiben x_0 für die Stelle, an der f ihr Maximum annimmt. Gilt $f'(x_0) = 0$? Gibt es einen Widerspruch zu einem Satz in der Vorlesung?

(g) Wir betrachten die Funktion

$$g : I := \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^3 + x^2 - x.$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum dieser Funktion.

Hinweis: Gehen Sie wie im Fall der Funktion f vor.

11.3. lokale Extremalstellen

(a) **(∗)** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 - 3x.$$

Bestimmen Sie die lokalen Maximalstellen von f.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung und die Lösung zu Aufgabe 11.2(b).

(b) Bestimmen Sie die lokalen Minimalstellen von f.

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

(c) Ist $x_0 := 1$ eine lokale Extremalstelle von g? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

11.4. elementares Integral einer Treppenfunktion Wir betrachten die Treppenfunktion

$$\varphi := 2\chi_{]0,3[} - 3\chi_{[2,4]} : I := [0,5] \to \mathbb{R}.$$

(a) Zeichnen Sie φ.

(b) Was ist $\varphi(3)$?

(c) Berechnen Sie $S_I\varphi = S_I(\varphi)$, das elementare Integral von φ über I. (Zur besseren Unterscheidung vom Integral einer allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktion nennen wir das Integral einer Treppenfunktion *elementar* und verwenden wir die Notation $S_I\varphi$ dafür.)

11.5. (eigentliches) Riemann-Integral (∗) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2.$$

Zeigen Sie, dass f eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie ihr Riemann-Integral.

Hinweise:

- Gehen Sie wie im Beispiel der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, vor. Dieses Beispiel haben wir in der Vorlesung behandelt.
- Verwenden Sie die Tatsache, dass

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Das haben wir in einer Aufgabe in Übungsserie 1 (Induktion) gezeigt.

11.6. Riemann-Integrale, Eigenschaften der Integration Zeigen Sie, dass jede der Funktionen in (a)-(c) eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das eigentliche Riemann-Integral.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften der Riemann-Integration).

(a) $f := 2\chi_{]0,3[} - 3\chi_{[2,4]} : [0,5] \to \mathbb{R}$

(b) **(∗)** $f : I := [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := -3x^2 + 2x$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 11.5 und ein Beispiel aus der Vorlesung.

(c) **(∗)**

$$f :]0,3[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-x} \cos x$$

eigentlich Riemann-integrierbar ist und die folgende Abschätzung gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \leq 2\pi.$$

11.7. Linearität der elementaren Integration Seien $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Intervall, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. Wir schreiben das elementare Integral von φ als $S_I(\varphi)$. Zeigen Sie, dass

$$S_I(c\varphi) = cS_I(\varphi), \tag{1}$$

$$S_I(\varphi + \psi) = S_I(\varphi) + S_I(\psi). \tag{2}$$

Bemerkung: Die Gleichheiten (1,2) bedeuten, dass elementare Integration von Treppenfunktionen eine lineare Abbildung ist. Das gilt sogar für die Integration von allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktionen. Das ist Teil eines Satzes aus der Vorlesung.

11.8. nicht Riemann-integrierbare Funktion

Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion

$$f := \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} : I := [0,1] \to \mathbb{R}$$

beschränkt, aber nicht eigentlich Riemann-integrierbar ist.

Hinweise:

- Zeigen Sie, dass für das untere Riemann-Integral von f gilt:

  $$\underline{\int}_I f \leq 0.$$

  Betrachten Sie dazu eine beliebige Treppenfunktionen φ, sodass $\varphi \leq f$.

- Zeigen Sie analog, dass für das obere Riemann-Integral von f gilt:

  $$\overline{\int}_I f \geq 1.$$

11.9. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{\cos(x^2)} + \log\Big(\sin(x^3) + 2\Big).$$

Diese Funktion besitzt ein Maximum.

(b) Jede stetige Funktion auf dem Intervall $]0,1[= (0,1)$ besitzt eine Maximum.

(c) Jede Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ besitzt eine Maximum.

(d) Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Der Satz von Fermat über kritische Punkte besagt:

Falls x_0 eine lokale Extremalstelle von f ist, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f.

Gilt die Umkehrung dieses Satzes, d. h. die umgekehrte Implikation?

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Funktion $f : I := [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$, und die Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \chi_{\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]} : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

(e) $\varphi \leq f$.

(f) $\varphi \geq f$.

(g) $S_I(\varphi) \leq \underline{\int}_I f$

(h) $S_I(\varphi) \geq \overline{\int}_I f$

(i) Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\varphi \leq f \leq \psi$ und $S_I\psi - S_I\varphi \leq \varepsilon$. Dann ist f eigentlich Riemann-integrierbar.