Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

13.1. Integration mittels Substitution Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) **(∗)** $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := x^2 + 1$

(b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := e^x$

(c) **(∗)** $\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy$ **Hinweise:** Substitution $y = F(x) := \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, Beispiel aus der Vorlesung

(d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-y}}{y-\sqrt{y}}dy$ **Hinweis:** Substitution $y = F(x) := \sin^2 x$

(e) **(∗)** $\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan$

(g) $\int \frac{\exp}{\sqrt{1+\exp}}$

(h) $\int \tan$

13.2. Partialbruchzerlegung

(a) **(∗)** Wir betrachten die komplexen Polynome

$$p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) := z + 1, \qquad q(z) := z^2 - 3z + 2.$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f := \frac{p}{q}$, indem Sie die Nullstellen z_1, z_2 von q bestimmen und den folgenden Ansatz machen:

$$f(z) = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}. \tag{1}$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor:

- Terme in (1) auf den gleichen Nenner q erweitern
- Koeffizienten des erweiterten Zählers mit den Koeffizienten von p vergleichen

- lineares Gleichungssystem für Koeffizienten lösen

(b) Rechnen Sie nach, dass die gefundene Partialbruchzerlegung tatsächlich die Funktion f darstellt.

(c) Zeigen Sie ohne Rechnung, dass die gefundene Partialbruchzerlegung die Funktion f darstellt.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(d) Wir betrachten die komplexen Polynome

$$p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) := z^2 - z + 1, \qquad q(z) := z^3 - 2z^2 + z.$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f := \frac{p}{q}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Nullstellen von q bestimmen
- Ansatz für die Partialbruchzerlegung machen, der für jede einfache Nullstelle z_0 von q einen Term der Form $\frac{c}{z-z_0}$ und für jede doppelte Nullstelle z_0 Terme der Form $\frac{c}{z-z_0}$ und $\frac{c}{(z-z_0)^2}$ enthält (für verschiedene Koeffizienten c).
- Terme auf den gleichen Nenner q erweitern
- Koeffizienten des erweiterten Zählers mit den Koeffizienten von p vergleichen

(e) **(*)** Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) := \frac{z^3}{z+1}.$$

Hinweis: Polynomdivision

(f) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) := \frac{z^3 - 2z^2 + 3}{z^2 - 3z + 2}.$$

(g) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen, indem Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, der eine Formel für die

Koeffizienten der Partialbruchzerlegung liefert.

$$(*) f(z) := \frac{z+1}{z^2-3z+2}$$
$$f(z) := \frac{z^2-z+1}{z^3-2z^2+z}$$
$$f(x) := \frac{z}{(z^2-1)^2}$$

13.3. Integrale, Partialbruchzerlegung Berechnen Sie die folgenden Integrale.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

(a) **(∗)** $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

(c) **(∗)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2-3x+2}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

(f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^2+x-1}dx$

Hinweise zum letzten Integral:

- Erraten Sie eine Nullstelle des Nenners.
- Überprüfen Sie, ob es weitere reelle Nullstellen gibt.
- Verwenden Sie eine reelle Version der Partialbruchzerlegung. Machen Sie dazu einen Ansatz, der für jeden Faktor des Nennerpolynoms der Form $\left(x^2+\alpha x+\beta\right)$ Terme der Form $\frac{c(2x+\alpha)}{x^2+\alpha x+\beta}$ und $\frac{c}{x^2+\alpha x+\beta}$ enthält.

13.4. gliedweise Integration einer Potenzreihe Ein Ziel dieser Aufgabe ist es, das Integral $\int_0^{\frac{1}{10}} e^{y^2}dy$ numerisch näherungsweise zu berechnen.

(a) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x^2}$, gegeben ist.

Hinweis: Die Exponentialfunktion ist als punktweiser Limes einer Potenzreihe definiert.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_0^x e^{y^2} dy. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die letzte Teilaufgabe und einen Satz aus der Vorlesung zur Integration einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion.

Bemerkung: Wie in der Vorlesung erwähnt, ist F keine *elementare Funktion*, d. h. F ist nicht durch eine *Formel* darstellbar. Gemäss dieser Teilaufgabe ist F jedoch durch eine *Potenzreihe* darstellbar.

(c) **(∗)** Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x) := \int_0^x \cos(y^2) dy.$$

(d) Bestimmen Sie eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, deren punktweiser Limes durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad H(x) := \int_0^x \sin(y^2) dy.$$

(e) Zeigen Sie, dass die Funktion F (wie in (2)) glatt ist.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion.

(f) Bestimmen Sie die Taylorreihe von F mit Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

Hinweis: Verwenden Sie ein Beispiel aus der Vorlesung über die Taylorreihe einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion.

(g) Bestimmen Sie $T^3_{F,x_0=0}\left(\frac{1}{10}\right)$, das Taylorpolynom von F dritter Ordnung um $x_0 = 0$ an der Stelle $x = \frac{1}{10}$.

(h) Zeigen Sie, dass dieses Polynom an der Stelle $\frac{1}{10}$ das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^{y^2} dy$$

bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-5} nähert. Sie dürfen dabei verwenden, dass $\left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} + \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\right) e^{10^{-2}} < 10^{-1}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Taylor.

13.5. gewöhnliche Differentialgleichung, Separation der Variablen Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für eine differenzierbare Funktion $u : [0, 1[\to \mathbb{R}$,

$$\dot{u}(t) = 2tu(t)^2, \qquad \forall t \in [0, 1[, \tag{3}$$

zusammen mit der *Anfangsbedingung*

$$u(t_0 := 0) = 1. \tag{4}$$

Wir nennen (3,4) ein *Anfangswertproblem*. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems, die nirgends verschwindet.

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass u gegeben ist durch

$$u(t) = \frac{1}{1 - t^2}, \qquad \forall t \in [0, 1[. \tag{5}$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (gewöhnliche Differentialgleichung). Betrachten Sie dabei $\int_{t_0=0}^{t} \frac{\dot{u}}{u^2}$.

(b) Leiten Sie die Lösungsformel (5) für das Anfangswertproblem (3,4) nochmals heuristisch her, indem Sie die Variablen t und u in der Differentialgleichung (3) voneinander trennen, d. h., alle u-Terme nach links bringen und alle t-Terme nach rechts bringen. Schreiben Sie dazu $\dot{u}$ als $\frac{du}{dt}$.

Hinweis: Gehen Sie dabei wie in einer Bemerkung in der Vorlesung vor.

(c) Was ist am heuristischen Argument der letzten Teilaufgabe nicht mathematisch präzise?

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\, dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(b) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.

(c) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iv) Alle Aussagen sind falsch.