Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

14.1. Potenzreihe für den Arkustangens, Taylorreihe

(a) **(∗)** Sei $x \in]-1,1[$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} \to \arctan x \qquad \text{für} \qquad m \to \infty.$$

Bemerkung: Es gilt also, dass

$$\arctan x = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots \quad (1)$$

Hinweis: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar, Potenzreihe für Logarithmus). Verwenden sie dabei die Ableitung von arctan.

(b) **(∗)** Bestimmen Sie die Taylorreihe des Arkustangens um den Punkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie (a) und ein Beispiel aus der Vorlesung (Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe).

14.2. Grenzwert der "ungeraden" alternierenden harmonischen Reihe (Gregory-Leibniz-Reihe)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{2j+1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Bemerkung: Das ist die *Gregory-Leibniz-Reihe*. Diese Reihe ist eine ungerade Version der alternierenden harmonischen Reihe.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung über alternierende Reihen.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Gregory-Leibniz-Reihe, d. h. die unendliche Summe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

Begründen Sie Ihre Rechnung.

Hinweise: Gehen Sie wie in einem Beispiel in der Vorlesung vor (Potenzreihe für Logarithmus, Grenzwert der alternierenden Reihe). Verwenden Sie dabei (1) und den folgenden Satz.

Grenzwertsatz von Abel: Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $r \in]0,\infty[$. Falls die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k r^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \qquad \text{für } x \nearrow r. \tag{2}$$

Die folgende Aufgabe haben wir in der Vorlesung verwendet, um die Gammafunktion zu definieren.

14.3. Jede wachsende Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenzfunktion

(a) **(∗)** Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f bei ∞ *bestimmt gegen* ∞ *divergiert* g. d. w.

$$\forall y \in \mathbb{R}\exists x^* \in \mathbb{R}\forall x \in X : x \geq x^* \Rightarrow f(x) \geq y.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f(x) \to \infty \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $c \in]0,\infty[$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$x^{-a}e^{cx} \to \infty \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Exponentialfunktion mittels einer Potenzreihe. Betrachten Sie ein Glied in der Potenzreihe, das schneller wächst als die Potenzfunktion $x \mapsto x^a$.

Bemerkung: Das bedeutet, dass jede *wachsende* Exponentialfunktion $\exp(c\,\bullet)$, asymptotisch für grosse Argumente mehr wächst als jede Potenzfunktion $x \mapsto x^a$, auch wenn $c > 0$ noch so klein und a noch so gross sind.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ gilt, dass

$$x^a e^{-cx} \to 0 \qquad \text{für } x \to \infty. \tag{3}$$

Hinweis: Verwenden Sie (a).

Bemerkung: Wir haben (3) in der Vorlesung verwendet, um zu zeigen, dass die Funktion $t \mapsto t^a e^{ct}$ auf $]0,\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, falls $a > -1$, $c < 0$. Für $x > 0$ ist das uneigentliche Riemann-Integral der Funktion $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ per definitionem $\Gamma(x)$, wobei Γ die Gammafunktion ist.

14.4. uneigentliche Riemann-Integrale

(a) **(∗)** Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto e^{cx}$ über $[0, \infty[$ uneigentlich (Riemann-)integrierbar? Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{cx} dx$, falls es existiert.

(b) Zeigen Sie, dass der Logarithmus über $]0, 1]$ uneigentlich integrierbar ist und berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^1 \log$.

Hinweise:

- Verwenden Sie eine Aufgabe aus Übungsserie 12 ((un-)bestimmte Integrale, partielle Integration), in der wir das unbestimmte Integral von log berechnet haben.
- Zeigen Sie, dass $x \log x \to 0$ für $x \searrow 0$. Verwenden Sie dazu Aufgabe 14.3(b) und den folgenden Hilfssatz:

  Hilfssatz (Substitution für Konvergenz): Seien $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Falls f an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert[1] und g an der Stelle y_0 gegen z_0 konvergiert, dann konvergiert die verknüpfte Funktion $g \circ f$ an der Stelle x_0 gegen z_0.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ über $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist und berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$.

(d) Zeigen Sie, dass die Gaußfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2}$, über $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist.

Hinweis: Finden Sie eine Funktion $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, die uneigentlich integrierbar ist, sodass $f \leq g$ auf $[1, \infty[$ und verwenden Sie den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: Seien $a_- \in \mathbb{R}$, $a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die lokal Riemann-integrierbar ist, sodass es eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $g : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f| \leq g$. Dann ist f uneigentlich Riemann-integrierbar. Analoges gilt für eine Funktion $f :]a_-, a_+] \to \mathbb{R}$.

Beweis des Hilfssatzes:

[1] Im Fall $y_0 = \pm\infty$ meinen wir damit, dass f an der Stelle x_0 bestimmt gegen y_0 divergiert. Wir nehmen hier nicht an, dass x_0 im Abschluss von X liegt. Falls das nicht der Fall ist, können wir Konvergenz immer noch wie bis anhin definieren. Der Grenzwert braucht dann allerdings nicht eindeutig zu sein.

Christian Blatter, *Analysis eins*, ETHZ, Studiengänge Mathematik und Physik, Wintersemester 2003/04, Version vom 1. Oktober 2003:

9.5 Uneigentliche Integrale, Konvergenzkriterien, (9.32), S. 374

(e) Ist der Sinus über $[0,\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Warum?

14.5. GDG (gewöhnliche Differentialgleichung).

(a) Sei I ein Intervall und $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die zu φ gehörige GDG ist gegeben durch

$$\varphi\Big(t, u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t)\Big) = 0, \qquad \forall t \in I. \tag{4}$$

Schreiben Sie diese GDG für die folgende Funktion aus:

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t, x_0, x_1) := x_0 x_1 - e^t.$$

Führen Sie 1-4 für jede GDG (b)-(f) aus.

1. Geben Sie die Ordnung n der GDG an.
2. Finden Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, sodass die GDG nach Verschieben von Termen [2] durch (4) gegeben ist.
3. Geben Sie an, ob die Gleichung linear ist.
4. Falls die Gleichung linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.

(b) **(∗)** $\dot{u}(t) = t^2$

(c) $\dot{u} - 2u = 0$

(d) **(∗)** $\dot{u} = u^2$

(e) **(∗)** $\ddot{u} - 5\dot{u} = -6u$

(f) $\dot{u}(t) - 2u(t) = e^{2t}$

14.6. homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, Anfangswertproblem Führen Sie 1 und 2 für jede GDG (a)-(d) aus. In dieser Aufgabe ist die gesuchte Funktion u eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Bemerkung: Die hier betrachteten GDG sind linear und homogen.

[2] von der linken Seite auf die rechte Seite oder umgekehrt

1. Wir schreiben n für die Ordnung der GDG. Finden Sie n linear unabhängige Lösungen der gegebenen GDG.

   Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion u tatsächlich die GDG löst.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge Z für die GDG.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Linearkombination der von Ihnen gefundenen Lösungen die GDG löst. Zeigen Sie auch, dass diese Linearkombinationen *alle* Lösungen der GDG sind. Verwenden Sie dazu einen Satz aus der Vorlesung (Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, Superpositionsprinzip).

(a) **(∗)** $\dot{u} = 2u$

(b) **(∗)** $\ddot{u} = 4u$

(c) $\ddot{u} + u = 0$

(d) $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = 0$

(e) Wir betrachten jetzt die Funktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(t) := t\Big(\zeta \circ \exp \circ \Gamma \circ \exp(t)\Big), \tag{5}$$

wobei Γ die Gammafunktion und ζ die Zetafunktion bezeichnen. Löst diese Funktion die GDG (a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

Hinweise:

- Verwenden Sie (a)-(d).
- Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis des Lösungsraums Z der GDG. [3] Machen Sie den Ansatz

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \qquad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

- Aus der Anfangsbedingung ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$. Lösen Sie dieses Gleichungssystem. Setzen Sie die gefundenen Koeffizienten in (6) ein.

[3] Das bedeutet, dass $u_1, \dots, u_n$ linear unabhängig sind und Z aufspannen.

- Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion u tatsächlich das Anfangswertproblem löst.

(∗)(f) $\begin{cases} \dot{u} &= 2u \\ u(0) &= 3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{u} &= 2u \\ u(1) &= 1 \end{cases}$

(∗)(h) $\begin{cases} \ddot{u} &= 4u \\ u(0) &= 2 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \ddot{u} + u &= 0 \\ u(0) &= 1 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \ddot{u} + 2\dot{u} + 2u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 1 \end{cases}$

14.7. gedämpfter Federschwinger, elektrischer Schwingkreis

(a) Wir betrachten einen freien Federschwinger, der in einer zähen Flüssigkeit liegt und daher durch viskose Reibung gedämpft wird, wie in einem Beispiel in der Vorlesung. Wir nehmen dabei an, dass die Konstanten wie folgt gegeben sind:

$k :=$ Federkonstante $= 2\text{Nm}^{-1} = 2\text{kgs}^{-2}$

$c :=$ Dämpfungskonstante der Flüssigkeit $= 2\text{Nm}^{-1}\text{s} = 2\text{kgs}^{-1}$

$m :=$ Masse des Körpers $= 1\text{kg}$

Wir nehmen an, dass die Auslenkung x des Körpers zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durch $x(0) = 1\text{m}$ gegeben ist und dass der Körper zum Zeitpunkt 0 in Ruhe ist. Bestimmen Sie die Auslenkung x als eine Funktion der Zeit.

(b) **(∗)** Wir betrachten einen freien elektrischen Schwingkreis, der aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule besteht, die hintereinandergeschaltet sind, wobei die Enden miteinander verbunden sind, wie in einem Beispiel in der Vorlesung. Wir nehmen dabei an, dass die Konstanten wie folgt gegeben sind[4]:

[4] Wir verwenden hier die SI-Einheiten kg = Kilogramm, m = Meter, s = Sekunde, A = Ampère, F = Farad, Ω = Ohm, H = Henry, C = Coulomb.

$C :=$ Kapazität des Kondensators $= \frac{1}{2}\mathrm{F} = \frac{1}{2}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^4\mathrm{A}^2$

$R :=$ elektrischer Widerstand des Widerstands (Bauelement) $= 2\Omega = 2\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-3}\mathrm{A}^{-2}$

$L :=$ Induktivität der Spule $= 1\mathrm{H} = 1\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-2}$

Wir nehmen an, dass die Ladung Q des Kondensators zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durch $Q(0) = 1\mathrm{C} = 1\mathrm{s\,A}$ gegeben ist und dass zum Zeitpunkt 0 kein Strom fliesst. Bestimmen Sie die Ladung Q als eine Funktion der Zeit.

Die folgenden zwei Aufgaben sind Zusatzaufgaben, um den Begriff eines Vektorraumes zu repetieren. Dieser Begriff wurde in der Vorlesung *Lineare Algebra* behandelt. Er spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen.

14.8. Vektorraum über $\mathbb{R}$

Überprüfen Sie, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition eines Vektorraums:

Ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$ ist ein Tripel $\big(X, +, \cdot\big)$, wo X eine Menge ist, und

$$+ : X \times X \to X, \quad \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

Abbildungen sind, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

1. $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Das heisst:
   a) $(X, +)$ ist assoziativ, also
   $$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in X.$$
   b) Es existiert ein Element $0_X \in X$, sodass
   $$0_X + x = x + 0_X = x, \quad \forall x \in X.$$
   0_X wird Identitätselement der abelschen Gruppe $(X, +)$ genannt.
   c) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in X$, sodass
   $$x + y = 0_X.$$
   Das Element $y \in X$ wird das Inverse zu x genannt.
   d) $(X, +)$ ist abelsch (oder kommutativ), also
   $$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X.$$
2. Die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist kompatibel mit der Skalarmultiplikation, das heisst
   $$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ x \in X.$$
3. Die Skalarmultiplikation mit 1 ist trivial, das heisst
   $$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X.$$

4. Distributivität gilt, das heisst

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot x &= a\cdot x + b\cdot x,\\ a\cdot(x+y) &= a\cdot x + a\cdot y,\end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

In der Vorlesung wird die Tatsache behandelt, dass der Lösungsraum einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung ein Vektorraum ist. Der Grund dafür ist, dass dieser Raum ein linearer Unterraum des Vektorraums aller Funktionen ist. Dass die Funktionen einen Vektorraum formen, ist die Aussage der nächsten Aufgabe.

14.9. Vektorraum von Funktionen

Sei S eine Menge, und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$V^S = \{f : S \to V \text{ ist eine Abbildung}\},$$

die Menge aller Funktionen von S nach V, zusammen mit der punktweise Addition and Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Mit punktweiser Addition and Skalarmultiplikation werden die folgenden Abbildungen gemeint:

$$\begin{aligned}+ : V^S \times V^S \to V^S, &\quad (f+g)(s) := f(s) + g(s),\\ \cdot : \mathbb{R} \times V^S \to V^S, &\quad (a\cdot f)(s) := a\cdot(f(s)),\end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichungen die Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum V verwendet wird.

Bemerkung: Falls Ihnen lieber ist, können Sie die Aufgabe nur für den Fall $V = \mathbb{R}$ lösen.

Bemerkung: Motivation für die Notation B^A: Angenommen A and B sind endliche Mengen. Wir schreiben $|A|$ für die Kardinalität (= Anzahl Elemente) von A. Dann gilt

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|},$$

also die Anzahl Funktionen von A nach B ist gleich der Anzahl Elemente von B hoch die Anzahl Elemente von A.