Lösung 1

1. Aufgabe

(a) Die Formulierung mit Quantoren lautet

$$\exists n, m \in \mathbb{N} \,:\, n + m \in \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist wahr. Für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist die Summe $n + m$ immer eine natürliche Zahl.

(b) Die Formulierung mit Quantoren lautet

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, m^2 = n - 5. \tag{1}$$

Für $m = 0$, wäre $m = 0$, also müsste $n - 5 = 0$, was $n = 5$ ergibt. Das passt also. Für $m = 1$, wäre $m = 1$, also müsste $n - 5 = 1$, was $n = 6$ ergibt. Das ist auch in Ordnung. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig und definiere $n = m^2 + 5$. Dann ist n eine natürliche Zahl, für die die Gleichung (1) erfüllt ist. Das zeigt, dass die Aussage wahr ist.

(c) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen kann man mit $2\mathbb{N}$ bezeichnen. Die Formulierung mit Quantoren lautet also

$$\forall n \in 2\mathbb{N}\, \exists m, l \in \mathbb{N} \,:\, n = m^2 + l^2.$$

Diese Aussage ist falsch. Einige gerade natürliche Zahlen können nicht als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden. Nehmen wir zum Beispiel $n = 4$. Wenn die Aussage wahr wäre, dann ist es klar, dass m und l kleiner als 2 sein müssen, da $2^2 = 4$. Die einzige Möglichkeit wäre also $m = 1$ und $l = 1$ aber

$$1^2 + 1^2 \neq 4.$$

2. Aufgabe

(a) Der Definitionsbereich der Funktion a ist $X = \mathbb{R}$. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist der Wertebereich gegeben durch

$$Y = [-2, \infty).$$

(b) Der Definitionsbereich der Funktion b ist $X = \mathbb{R}$. Der Wertebereich dieser Funktion lautet

$$Y = \mathbb{R}.$$

(c) Der Definitionsbereich der Funktion c ist $X = [-2, \infty)$, da man die Wurzel aus negativen Zahlen nicht ziehen kann. Der Wertebereich dieser Funktion lautet

$$Y = [0, \infty).$$

(d) Der Definitionsbereich der Funktion d ist $X = [2, \infty)$, da man die Wurzel aus negativen Zahlen nicht ziehen kann. Der Wertebereich dieser Funktion lautet

$$Y = [1, \infty),$$

da $\sqrt{x-2} \geq 0$ für alle $x \in X$.

(e) Der Definitionsbereich der Funktion e ist $X = \mathbb{R}$. Der Wertebereich dieser Funktion lautet

$$Y = \mathbb{R},$$

da e eine stetige Funktion ist, die unendlich gross werden kann, wenn $x \to -\infty$, und unendlich klein, wenn $x \to \infty$. Im Kapitel 2, werden wir Stetigkeit und Grenzwerte betrachten. Für die Funktion e gilt also

$$\lim_{x \to -\infty} e(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} e(x) = -\infty.$$

(f) Der Definitionsbereich der Funktion f ist $X = \mathbb{R}$. Der Wertebereich dieser Funktion lautet

$$Y = [-2, 2],$$

da $\sin(x) \in [-1, 1]$ für alle $x \in X$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Eine Funktion $f : X \to Y$ zuordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$. Man kann in (a) sehen, dass $x = 0$ zwei verschiedene Bilder hat. Daher kann es sich nicht um den Graphen einer Funktion handeln.

2. Ergebnis: (d).

Erstens haben wir, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ gilt. Ausserdem haben wir $0 \in f(X)$, da $0 \in X$. Daher erhalten wir $f(X) = [0, 25)$, weil

$$f(5) = 25 \text{ und } 5 \notin X.$$