Lösung 10

1. Aufgabe

(a) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor. Der Nenner $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ hat eine doppelte Nullstelle $x = \frac{1}{2}$. Somit ist $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 2(x - \frac{1}{2})^2$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{1-x}{2x^2 - 2x + \frac{1}{2}} = \frac{1-x}{2(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{(x-\frac{1}{2})^2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{1-x}{2(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{A(x-\frac{1}{2}) + B}{(x-\frac{1}{2})^2} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{1-x}{2} = A(x - \tfrac{1}{2}) + B.$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{4}$. Es folgt also

$$\frac{1-x}{2x^2 - 2x + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist damit

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{2x^2 - 2x + \frac{1}{2}}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(|x - \tfrac{1}{2}|) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\ln(|x-\tfrac{1}{2}|) - \frac{1}{4x-2} + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(b) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor. Der Nenner $Q(x) = x^2 - 2x + 5$ hat keine Nullstellen. Wir wollen also die zu integrierende Funktion in die Form $\frac{A\cdot Q'(x)+B}{Q(x)}$ bringen, mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$. Es ist $Q(x) = x^2 - 2x + 5$ und $Q'(x) = 2x - 2$. Wir möchten also

$$\frac{x+1}{x^2-2x+5} = \frac{A\cdot Q'(x) + B}{Q(x)} = \frac{A(2x-2)+B}{x^2-2x+5}.$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert $A = \frac{1}{2}$ und $B = 2$. Somit haben wir

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx}_{=\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = \ln(|Q(x)|)+C} + 2\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx. \qquad (*)$$

Es bleibt die Stammfunktion $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ zu finden. Dazu müssen wir den Nenner in der Form $(x+\beta)^2+\alpha^2$ schreiben. Gesucht ist also

$$x^2 - 2x + 5 = (x+\beta)^2 + \alpha^2 \quad \text{und somit} \quad x^2 - 2x + 5 = x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha^2.$$

Koeffizientenvergleich liefert $\beta = -1$ und daraus $\alpha^2 = 4$, also $\alpha = 2$. Somit ist die fehlende Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Insgesamt folgt somit eingesetzt in $(*)$, dass

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2-2x+5|) \; + \; \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(c) Mit Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + \ln|x+1|\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C,\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ ist. Alternativ können wir $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|(f(x))| + C$ mit $f(x) = x^2 - 1$ nutzen:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left(|x^2-1|\right) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe

(a) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\cos^3(x)\sin(x)$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = \cos(x)$. Somit ist $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$ also $dx = -\frac{1}{\sin(x)}\,du$. Mit dieser Substitution finden wir

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\sin(x)\,dx &= \int u^3 \sin(x)\frac{-1}{\sin(x)}\,du = -\int u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C \\ &= -\frac{\cos^4(x)}{4} + C \\ &= F(x) + C,\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ ist. Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,dx = F(2\pi) - F(\pi) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = \pi$ und $x = 2\pi$ werden unter der Substitution $u = \cos(x)$ zu den Grenzen $u = -1$ und $u = 1$. Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u^3 \sin(x)\frac{-1}{\sin(x)}\,du = -\int_{-1}^{1} u^3\,du = -\frac{u^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

(b) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\frac{5+x}{5-x}$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = 5 - x$. Somit ist $\frac{du}{dx} = -1$ also $dx = -1\,du$. Mit dieser Substitution finden wir ($u = 5 - x \Leftrightarrow x = 5 - u$)

$$\begin{aligned}\int \frac{5+x}{5-x}\,dx &= \int \frac{10-u}{u}(-1)\,du = \int 1 - \frac{10}{u}\,du = u - 10\ln(|u|) + C \\ &= 5 - x - 10\ln(|5-x|) + C \\ &= F(x) + C,\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ ist. Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\,dx = F(1) - F(-1) = 4 - 10\ln(4) - 6 + 10\ln(6) = -2 + 10(\underbrace{\ln(6) - \ln(4)}_{=\ln(6/4)=\ln(3/2)}) = -2 + 10\ln(3/2).$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = -1$ und $x = 1$ werden unter der Substitution $u = 5 - x$ zu den Grenzen $u = 6$ und $u = 4$ (in dieser Reihenfolge!!). Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\,dx = \int_{6}^{4} \frac{10-u}{u}(-1)\,du = -\int_{6}^{4} \frac{10-u}{u}\,du = \int_{4}^{6} \frac{10-u}{u}\,du = \int_{4}^{6} \frac{10}{u} - 1\,du$$
$$= \big(10\ln(|u|) - u\big)\Big|_{4}^{6} = -2 + 10\ln(3/2).$$

(c) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\frac{2-x}{1+\sqrt{x}}$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = 1 + \sqrt{x}$. Somit ist $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ also $dx = 2\sqrt{x}\,du$. Substituieren wir im Integral ist

$$\int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2-x}{u} 2\sqrt{x}\,du \overset{(*)}{=} \int \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du.$$

Im Schritt $(*)$ haben wir die übriggebliebenen x mit der gleichen Substitution ersetzt (d.h., $u = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x = (u-1)^2$). Die obige Stammfunktion können wir ausrechnen

$$\begin{aligned}
\int \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du &= 2\int \frac{2(u-1)-(u-1)^3}{u}\,du = 2\int \frac{2(u-1)-(u^3-3u^2+3u-1)}{u}\,du \\
&= 2\int \frac{-u^3+3u^2-u-1}{u}\,du = 2\int (-u^2+3u-1-\frac{1}{u})\,du \\
&= 2\Big(-\frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} - u - \ln(|u|)\Big) + C \\
&= -\frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + 3(1+\sqrt{x})^2 - 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(|1+\sqrt{x}|) + C \\
&= F(x) + C,
\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ ist. Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_0^4 \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = F(4) - F(0) = \ldots = \frac{8}{3} - 2\ln(3).$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = 0$ und $x = 4$ werden unter der Substitution $u = 1 + \sqrt{x}$ zu den Grenzen $u = 1$ und $u = 3$. Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_0^4 \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^3 \frac{2-x}{u} 2\sqrt{x}\,du = \int_1^3 \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du$$
$$\overset{\text{wie oben}}{=} \ldots = 2\int_1^3 (-u^2+3u-1-\frac{1}{u})\,du = 2\Big(-\frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} - u - \ln(|u|)\Big)\Big|_1^3 = \ldots = \frac{8}{3} - 2\ln(3).$$

3. Aufgabe

(a)

$$\int_0^a xe^{-cx^2}\,dx = -\frac{1}{2c}e^{-cx^2}\Big|_0^a = \frac{1}{2c}\big(1-e^{-ca^2}\big).$$

(b)

$$\int_0^a e^{\sqrt{x}}\,dx \overset{(z=\sqrt{x})}{=} \int_0^{\sqrt{a}} e^z \cdot 2z\,dz = 2(z-1)e^z|_0^{\sqrt{a}} = 2+2(\sqrt{a}-1)e^{\sqrt{a}}.$$

(c)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \big(\ln f(x)\big)'\,dx = \ln\left(f(x)\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

(d) Wir verwenden (c) mit $f(x)=\ln(x)$ (für $a,b>1$ und $x\in[a,b]$ ist $f(x)>0$, wie in (c) gefordert), und erhalten

$$\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \overset{(d)}{=} \ln(\ln(x))\,|_a^b = \ln(\ln(b))-\ln(\ln(a)) = \ln\left(\frac{\ln(b)}{\ln(a)}\right).$$

4. Aufgabe

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int 1-\frac{2}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x-2\arctan(x)+C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$.

(b) Mit (wiederholter) partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin(2x)\,dx &= -e^{-x}\sin(2x)+2\int e^{-x}\cos(2x)\,dx \\ &\overset{P.I.}{=} -e^{-x}\sin(2x)+2\left(-e^{-x}\cos(2x)-2\int e^{-x}\sin(2x)\,dx\right) \\ &= -e^{-x}\sin(2x)-2e^{-x}\cos(2x)-4\int e^{-x}\sin(2x)\,dx.\end{aligned}$$

Auflösen nach $\int e^{-x}\sin(2x)\,dx$ ergibt

$$\int e^{-x}\sin(2x)\,dx = \frac{-1}{5}e^{-x}(\sin(2x)+2\cos(2x))+C,$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$.

(c) Wir substituieren $u(x)=\sqrt{x}$ (wobei $x>0$).
Damit gilt $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, und somit $dx=2\sqrt{x}du=2u\,du$ und

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int ue^u\,du \overset{P.I.}{=} 2(u-1)e^u+C.$$

Mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C,$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$.

(d) Mittels Partialbruchzerlegung (siehe auch MC) lässt sich der Integrand in eine Summe umschreiben, deren einzelne Summanden einfach zu integrieren sind:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \overset{\text{(PBZ)}}{=} -\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3-x} &= -\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right| + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(e) Es gibt (mindestens) zwei Lösungswege:

- Mittels Partialbruchzerlegung: Mit $x^2-4=(x+2)(x-2)$ gilt:

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}, \text{ genau wenn } A = 1/4 \text{ und } B = 3/4.$$

  Dann folgt mit Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x+1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-2}dx = \frac{1}{4}\Big(\ln|x+2| + 3\ln|x-2|\Big) + C,$$

  wobei $C \in \mathbb{R}$ ist.

- Um Substitution anzuwenden, gehen wir wie folgt vor. Zuerst schreiben wir das Integral wie folgt um:

$$\int \frac{x+1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x\,dx}{x^2-4} + \int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x\,dx}{x^2-4} + \int \frac{1}{4(x-2)}dx - \int \frac{1}{4(x+2)}dx$$

  Setze nun $u_1(x) = x^2-4$, und $du_1 = 2x\,dx$ für das erste Integral, $u_2(x) = x-2$ für das zweite Integral und $u_3(x) = x+2$ für das letzte Integral. Folglich ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-4}dx &= \int \frac{1}{2}\frac{2xdx}{x^2-4} + \int \frac{1}{4(x-2)}dx - \int \frac{1}{4(x+2)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u_1}du_1 + \frac{1}{4}\int \frac{1}{u_2}du_2 - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u_3}du_3 \\ &= \frac{1}{2}\ln(|u_1|) + \frac{1}{4}\ln(|u_2|) - \frac{1}{4}\ln(|u_3|) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(|x^2-4|) + \frac{1}{4}\ln(|x-2|) - \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln(|(x+2)(x-2)|)\Big) + \frac{1}{4}\ln(|x-2|) - \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln(|x+2|) + \ln(|x-2|)\Big) + \frac{1}{4}\ln(|x-2|) - \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + C \\ &= \frac{3}{4}\ln(|x-2|) + \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + C,\end{aligned}$$

  für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(f) Durch partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2\,\ln(x)\,dx &= \frac{1}{3}x^3\,\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\,\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(g) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(h) Der Zähler $6x-2$ ist genau die Ableitung des Nenners $3x^2-2x-5$. Sei also $f(x) = 3x^2-2x-5$. Dann gilt mit der Formel aus der Vorlesung

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| = \ln|3x^2-2x-5| + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ ist. Mit Partialbruchzerlegung folgt äquivalent dazu

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{6x-2}{3(x-\frac{5}{3})(x+1)}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{A}{x-\frac{5}{3}} + \frac{B}{x+1}\,dx\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{3}{x-\frac{5}{3}} + \frac{3}{x+1}\,dx = \ln|x-\tfrac{5}{3}| + \ln|x+1| + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ und wobei sich $(*)$ durch Auflösen von $A+B=6$ und $A-\frac{5}{3}B=-2$ ergibt. Die Logarithmusgesetze liefern dann noch

$$\ln|x-\tfrac{5}{3}| + \ln|x+1| = \ln|3x^2-2x-5|.$$

(i) Mit partieller Integration und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\,dx &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,dx\\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Dies ist eine Anwendung der Formel

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

welche wir nochmals ausführlich beschreiben. Mit der Substitution $f(x) = u = \sin(x)$ folgt $f'(x) = u' = \cos(x)$, also $du = \cos(x)dx$ und somit

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

2. Ergebnis: (a).

Mit der Substitution $x = 2\cosh(u)$ erhalten wir $dx = 2\sinh(u)\,du$, und für das Integral

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx &= \int_0^{\operatorname{arcosh}(2)} \sqrt{4\cosh^2(u)-4}\cdot 2\sinh(u)\,du = 4\int_0^{\operatorname{arcosh}(2)} \sinh^2(u)\,du \\
&= 2\int_0^{\operatorname{arcosh}(2)} (\cosh(2u)-1)\,du = 2\left(\frac{\sinh(2u)}{2} - u\right)\Big|_0^{\operatorname{arcosh}(2)} \\
&= 2\left(\frac{\sinh(2\operatorname{arcosh}(2))}{2} - \operatorname{arcosh}(2)\right) = 4\sqrt{3} - 2\operatorname{arcosh}(2).
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt haben wir

$$\sinh^2(u) = \frac{\cosh(2u)-1}{2}$$

verwendet. Im letzten Schritt haben wir

$$\sinh(2\text{arcosh}(2)) = 2\sinh(\operatorname{arcosh}(2))\cosh(\operatorname{arcosh}(2)) = 4\sqrt{3}$$

verwendet.

3. Ergebnis: (b).

Wir berechnen $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \int_{-\pi}^{b} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+2}dx = [\ln(\cos(x)+2)]_{-\pi}^{b} = \ln(\cos(b)+2)$ also muss $\cos(b) = -\frac{1}{2}$ gelten, was hier nur für $b = \frac{2\pi}{3}$ erfüllt ist.

4. Ergebnis: (b).

Es gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} &= -\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}x(x-1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-(x^2-1) + \frac{1}{2}x(x-1+x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-x^2+1+\frac{1}{2}x\cdot 2x}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{x^3-x}.
\end{aligned}$$