Lösung 11

1. Aufgabe

Wir möchten den Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen anwenden. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Beachten Sie, dass die Folge $(b_n)_n = (1/n^\alpha)_n$ monoton fallend und eine Nullfolge ist, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

für alle $\alpha > 0$.

2. Aufgabe

Die Folge

$$(c_n)_n = \left(\frac{2^n \log(n)}{n!}\right)_n$$

konvergiert gegen 0 und erfüllt, dass $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher können wir die folgende Formel verwenden:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^n \log(n)}{n!}}{\frac{2^{n+1}\log(n+1)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\frac{2\log(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\log(n)}{\log(n+1)} = \infty.$$

3. Aufgabe

Die Taylorreihenentwicklung dritter Ordnung einer Funktion um einen Entwicklungspunkt x_0 ist

$$p(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n (x-x_0)^n, \quad \text{wobei } c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Es folgt für die Koeffizienten

$$c_0 = f(1) = 1, \qquad c_1 = f'(1) = \frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{2}{9\cdot 2!}, \qquad c_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{10}{27\cdot 3!}.$$

Die zu f gehörige Taylorreihenentwicklung dritter Ordnung lautet demnach

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3.$$

Für x-Werte in der Nähe von $x_0 = 1$ gilt $f(x) \approx p(x)$. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} p(0.7) &= 1 + \frac{1}{3}(0.7-1) - \frac{1}{9}(0.7-1)^2 + \frac{5}{81}(0.7-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1000} = 0.888333\ldots. \end{aligned}$$

Also ist näherungsweise $\sqrt[3]{0.7} = f(0.7) \approx p(0.7) = 0.888333\ldots$. Zum Vergleich: Der genaue Wert von $\sqrt[3]{0.7}$ ist

$$\sqrt[3]{0.7} = 0.887904\ldots.$$

4. Aufgabe

(a) Die Ableitungen von $f(x) = \ln(1+x)$ sind

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots$$

Zusammengefasst ist die n-te Ableitung der Funktion

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(0) = 0$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Die gesuchte Taylorreihe ist damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

(b) Die Ableitungen von $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ sind

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2},\ f''(x) = \frac{2\cdot 3}{x^4} - \frac{2\cdot 2}{x^3},\ f^{(3)}(x) = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} + \frac{2\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ \ldots$$

Zusammengefasst ist die n-te Ableitung der Funktion

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\left(\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} - \frac{2\cdot n!}{x^{n+1}}\right).$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(1) = -1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n\frac{(n+1)! - 2\cdot n!}{n!} = (-1)^n(n+1-2) = (-1)^n(n-1).$$

Die gesuchte Taylorreihe ist damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n-1)(x-1)^n,$$

da auch der erste Koeffizient als $c_0 = -1 = (-1)^0(0-1)$ geschrieben werden kann.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \leq 1$ gilt nämlich $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Durch Vergleich mit der divergenten harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

erhalten wir, dass die Reihe in diesem Fall ($\alpha \leq 1$) divergent ist. Durch Quotiente kriteria, kann mann die Konvergenz fur $\alpha > 1$ zeigen.

2. Ergebnis: (a).

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\cos(x)), \\ f'(x) &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Die Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist daher gegeben durch

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 0 + 0 - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}.$$