# Lösung 12

## 1. Aufgabe

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > n$ ist $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha}$. Es folgt

$$\frac{1}{n^\alpha} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}\, dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

und hieraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

(b) Aus **a)** gewinnt man die Abschätzung

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = -\frac{1}{\alpha-1} x^{-\alpha+1}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

## 2. Aufgabe

(a) Die Ableitungen der Sinusfunktion sind

$$\sin'(x) = \cos(x),\ \sin''(x) = -\sin(x),\ \sin^{(3)}(x) = -\cos(x),\ \sin^{(4)}(x) = \sin(x),\ \ldots$$

Somit sind die Koeffizienten der Taylorreihe

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{-1}{3!},\ c_4 = 0,\ c_5 = \frac{1}{5!},\ \ldots$$

Die Taylorreihe der Sinusfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ lautet also

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(b) Ähnlich wie in Teilaufgabe (a) folgt, dass die Koeffizienten der Taylorreihe der Kosinusfunktion

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{-1}{2!},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{4!},\ c_5 = 0,\ \ldots$$

sind. Die Taylorreihe der Kosinusfunktion um den Punkt $x_0 = 0$ lautet also

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

(c) Die Ableitungen von $f(x) = e^{-x}$ sind

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & n \text{ ungerade} \\ e^{-x}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also sind die Koeffizienten $c_0 = f(0) = 1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Die gesuchte Taylorreihe ist damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n,$$

da auch der erste Koeffizient als $c_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$ geschrieben werden kann.

(d) Die Ableitungen von $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ sind $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-1-n}$. Somit sind die Koeffizienten der Taylorreihe $c_0 = f(0) = 1$ und für $n \geq 1$ sonst

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1.$$

Die gesuchte Taylorreihe ist damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

## 3. Aufgabe (Prüfung Winter 2022)

Da die Funktion $f$ gerade ist, müssen die Koeffizienten $c_1, c_3$ und $c_5$ null sein. Um $c_2$ anzugeben, berechnen wir zuerst die erste und zweite Ableitung von $f$. Diese sind

$$f'(x) = -8xe^{-4x^2}, \qquad f''(x) = -8e^{-4x^2} + 64x^2e^{-x^2}.$$

Damit ist $c_2 = \frac{1}{2} f''(0) = -4$.

## 4. Aufgabe (Prüfung Winter 2019)

Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$. Somit erhalten wir

$$c_0 = f(1) = 0 \text{ und } c_1 = f'(1) = 3e.$$

# Multiple Choice

**1. Ergebnis:** (c).

Es sind $f'(x) = 2e^{2x}$ und $f''(x) = 4e^{2x}$. Damit gilt

$$c_2 = \frac{1}{2}f''(1) = \frac{1}{2}(4e^2) = 2e^2.$$

**2. Ergebnis:** (c).

Da die Funktion $f$ gerade ist, müssen die Koeffizienten $c_1, c_3$ und $c_5$ null sein. Um $c_2$ und $c_4$ anzugeben, berechnen wir :

$$f'(x) = 2xe^{x^2},\ f''(x) = e^{x^2}(2+4x^2),\ f^{(3)}(x) = e^{x^2}(8x^3+12x),\ f^{(4)}(x) = e^{x^2}(16x^4+48x^2+12).$$

Damit ist dann $c_2 = \dfrac{1}{2}f''(0) = 1$ und $c_4 = \dfrac{1}{4!}f^{(4)}(0) = \dfrac{1}{2}$.

**3. Ergebnis:** (a).

Die Potenzreihe ist umgeschrieben gleich $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n (x-1)^n$. Also ist hier $x_0 = 1$ und $c_n = (-\frac{1}{5})^n$ und es gilt

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{5})^n}{(\frac{1}{5})^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Das heisst, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) = (-4, 6)$ ist sicher Teil des Konvergenzbereichs. Für die Randpunkte gilt:

$$\text{falls } x = -4,\ \text{dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} 1^n,\ \text{also divergent,}$$
$$\text{falls } x = 6,\ \text{dann ist die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,\ \text{also divergent.}$$

Der Konvergenzbereich ist somit das Intervall $(-4, 6)$.