Lösung 13

1. Aufgabe

Wir schreiben $w = \sqrt{3} + i$ in Exponentialform,

$$\begin{aligned}
r &= |w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \\
w &= 2\exp\left(\frac{\pi}{6} i\right).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$z_k = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} i\right).$$

Ausgeschrieben haben wir also

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\pi}{36} i\right), \\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\cdot\pi}{6} i\right) = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{13\pi}{36} i\right), \\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\cdot 2\pi}{6} i\right) = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{25\pi}{36} i\right), \\
z_3 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\cdot 3\pi}{6} i\right) = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{37\pi}{36} i\right), \\
z_4 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\cdot 4\pi}{6} i\right) = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{49\pi}{36} i\right), \\
z_5 &= \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\cdot 5\pi}{6} i\right) = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{61\pi}{36} i\right).
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

(a) Es ist

$$z = i^n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} i, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

und damit

$$\arg(z) = \begin{cases} 0, & n \text{ teilbar durch } 4, \\ \frac{\pi}{2}, & n-1 \text{ teilbar durch } 4, \\ \pi, & n-2 \text{ teilbar durch } 4, \\ \frac{3\pi}{2}, & n-3 \text{ teilbar durch } 4. \end{cases}$$

In jedem Fall ist $|z| = 1$.

(b) Wegen $|2-i| = |2+i|$ gilt $|z| = 1$. Mit $\arg(2+i) = -\arg(2-i) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ folgt ferner

$$\arg(z) = 5\left(-\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = -10\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx -4.636.$$

Dieser Winkel kann umgeschrieben werden als

$$\arg(z) = -10\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi \approx 1.647.$$

Damit ist

$$\operatorname{Re}(z) = \cos\left(-10\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx -0.076 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \sin\left(-10\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx 0.997.$$

(c) Es gilt

$$z = (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{i\pi n}{4}} + e^{-\frac{i\pi n}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt für $m \in \mathbb{N}$,

$$\arg(z) = \begin{cases} 0, & n = 8m, n = 8m+1, n = 8m+7, \\ \pi, & n = 8m+3, n = 8m+4, n = 8m+5, \\ \text{nicht definiert}, & n = 8m+2, n = 8m+6, \end{cases}$$

sowie

$$|z| = 2^{\frac{n}{2}+1} \cdot \begin{cases} 1, & n = 4m, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 4m+1, n = 4m+3, \\ 0, & n = 4m+2. \end{cases}$$

(d) Es gilt

$$z = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Ferner ist

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{1}{a+ib}\right) = \arg(1) - \arg(a+ib) = -\arg(a+ib),$$

und

$$|z| = \frac{1}{|a+ib|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(e) Es gilt

$$z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(b)e^a + i\sin(b)e^a.$$

Hieraus folgt

$$\arg(z) = \arg\left(e^a e^{ib}\right) = \arg\left(e^a\right) + \arg\left(e^{ib}\right) = 0 + b = b,$$

und

$$|z| = |e^a| \cdot |e^{ib}| = e^a.$$

3. Aufgabe

(a)

$$\frac{3-12i}{-1+3i} = \frac{3-12i}{-1+3i} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{(3-12i)(-1-3i)}{10} = \frac{-3-36+i(12-9)}{10} = -\frac{39}{10} + i\frac{3}{10}.$$

(b)

$$\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{(1-i)^2}{2} = 2i.$$

(c)

$$\frac{1}{i+\frac{1}{2i+\frac{1}{3i+1}}} = \frac{1}{i+\frac{1}{\frac{2i(3i+1)+1}{3i+1}}} = \frac{1}{i+\frac{3i+1}{2i-5}} = \frac{1}{\frac{i(2i-5)+3i+1}{2i-5}} = \frac{2i-5}{-2i-1} = \frac{(2i-5)(2i-1)}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{12}{5}.$$

4. Aufgabe

Wir mutliplizieren z mit $1 = \frac{2m-i}{2m-i}$ und erhalten

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2m+i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2m+i} \cdot \frac{2m-i}{2m-i} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)(2m-i)}{4m^2+1} = \frac{\sqrt{3}-2m}{4m^2+1} + i\frac{2\sqrt{3}m+1}{4m^2+1}.$$

Wenn z reell ist muss $\mathrm{Im}(z) = 0$ gelten. Daher erhalten wir

$$\frac{2\sqrt{3}m+1}{4m^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{3}m+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Daraus folgt

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \implies \cos(\alpha) \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

2. Ergebnis: (a).

Es gilt

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot (5\sqrt{3} + bi) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + bi) = 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - b = (15 - b) + i(b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}).$$

Diese Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschhwindet:

$$b\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 0 \implies b = -5.$$