Lösung 2

1. Aufgabe

(a) **Aussage** : Für jede reelle Zahl x gibt es genau eine rationale Zahl y, sodass x gleich y ist.
Diese Aussage ist falsch, da es viele reelle Zahlen gibt, die keine rationale Entsprechung haben, wie zum Beispiel π oder $\sqrt{2}$. Für diese Zahlen existiert kein $y \in \mathbb{Q}$, das die Gleichung $x - y = 0$ erfüllt.

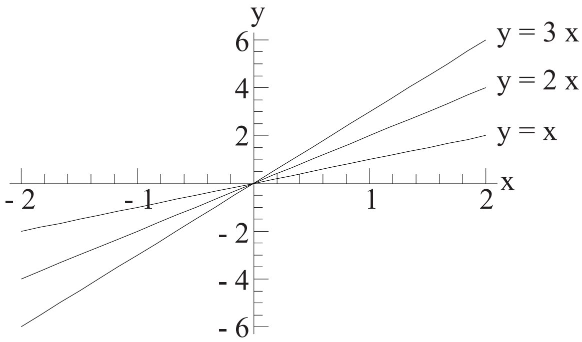
(b) **Aussage** : Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m, sodass n kleiner oder gleich m ist.
Diese Aussage ist wahr, da für jede natürliche Zahl n eine natürliche Zahl m existiert, die grösser oder gleich n ist. Man kann einfach $m = n$ wählen (oder jede grössere Zahl).

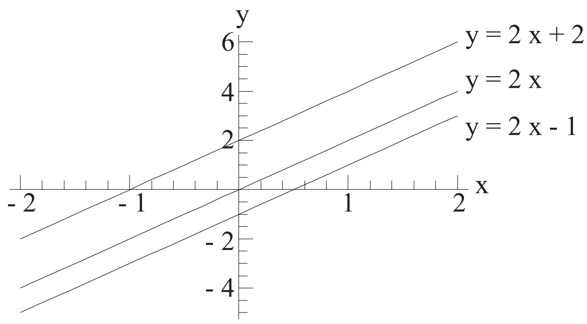
(c) **Aussage** : Es gibt eine natürliche Zahl m, die grösser oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.
Diese Aussage ist falsch, da es keine natürliche Zahl m gibt, die grösser oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist. Die natürlichen Zahlen sind nach oben unbeschränkt, daher kann keine feste Zahl m diese Bedingung erfüllen.

(d) **Aussage** : Es existiert keine natürliche Zahl n, sodass für alle natürlichen Zahlen m gilt, dass n grösser oder gleich m ist.
Diese Aussage ist wahr, da es keine natürliche Zahl n gibt, die grösser oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

2. Aufgabe

(a) In einem ersten Schritt wollen wir einen ersten Eindruck über das Aussehen von Graphen linearer Funktionen erhalten.

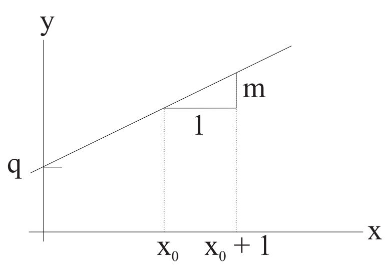




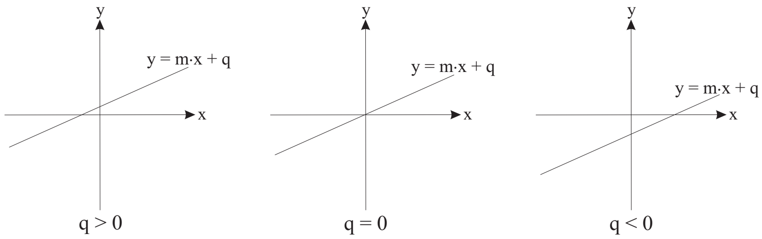
Eine geometrische Information für q erhalten wir, indem wir die Funktion für $x = 0$ berechnen. Wir finden $f(0) = q$. Somit ist q der y-Achsenabschnitt der linearen Funktion, das heisst der Graph der linearen Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $(0, q)$. Wenn wir die Funktionswerte von zwei um eine Einheit verschobene Punkte betrachten, so finden wir für eine beliebige Stelle x_0:

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) = (m \cdot (x_0 + 1) + q) - (m \cdot x_0 + q) = m.$$

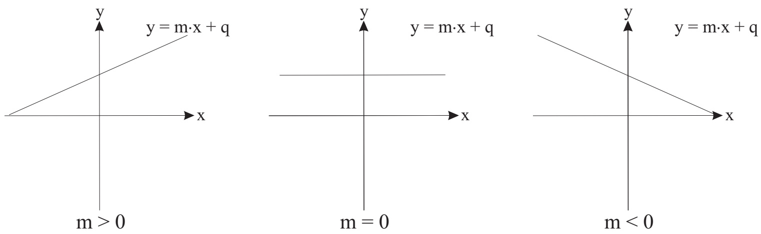
Somit finden wir als geometrische Interpretation von m: Erhöht man das Argument um eine Einheit, so ändert sich der Funktionswert um m. Wir wollen dies noch im folgenden Bild verdeutlichen:



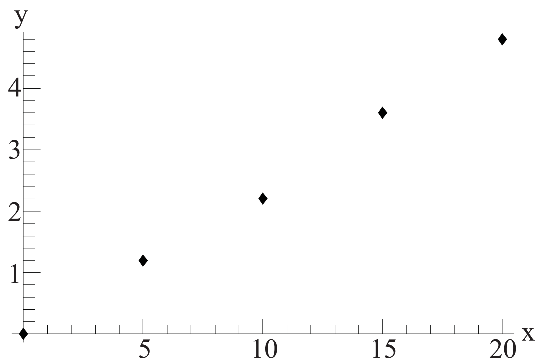
(b) Durch Betrachtung von Beispielen ergibt sich folgendes qualitatives Bild:



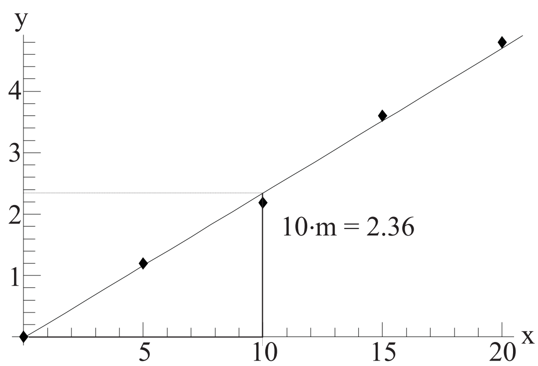
(c) Durch Betrachtung von Beispielen ergibt sich folgendes qualitatives Bild:



(d) Wenn wir die Punkte einzeichnen, so finden wir:



Als approximierende Gerade haben wir uns für folgende entschieden:



Da die Gerade durch den Ursprung verläuft, erhalten wir also $q = 0$ und $m = 0.236$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Es gilt
$$f(-1) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2.$$

2. Ergebnis: (a).

Es gilt $f(-1) = f(1) = -2$. Deshalb erfüllt die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 3$$
die Bedingung
$$\forall y \in Y \; \exists! x \in X : f(x) = y \tag{1}$$
nicht für alle Mengen X und Y, für die $-1, 1 \in X$ und $-2 \in Y$ sind. Das zeigt, dass nur die Antwort a) richtig sein kann. Die Funktion f ist eine Parabel, die symmetrisch zur y-Achse ist. Daher ist für $Y = [0, \infty)$ und $X = [1, \infty)$ die Bedingung (1) erfüllt.