Lösung 4

1. Aufgabe

Durch Raten finden wir die Nullstelle $x_1 = 1$. Wir führen daher eine Polynomdivision von $g(x)$ durch $(x - 1)$ und erhalten

$$
\begin{array}{cr|l}
 & x^3 - 2x^2 - x + 2 & x - 1 \\ \cline{3-3}
- & (x^3 - \ \ x^2) & x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2}
 & -x^2 - x + 2 & \\
- & (-x^2 + x) & \\ \cline{2-2}
 & -2x + 2 & \\
- & (-2x + 2) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Somit schreiben wir

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1).$$

Die Nullstellen der Funktion g sind daher $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$.

2. Aufgabe

(a) Die Funktion f hat genau dort eine Nullstelle, wo einer der beiden Faktoren gleich null ist, d.h. wenn gilt

$$\frac{x}{2} = k\pi \qquad \text{oder} \qquad 2x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

also für

$$x = 2k\pi \qquad \text{oder} \qquad x = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Logarithmieren beider Seiten der Gleichung liefert als Bedingung für eine Nullstelle $\sin(x) = -\sin(x)$, also $\sin(x) = 0$. Dies ist erfüllt für $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gilt

$$f(x) = \sin(x)\cos^2(x)(3\cos(x) - \sin(x)).$$

Die Funktion f hat ihre Nullstellen dort, wo einer der drei Faktoren verschwindet, also bei

$$x = k\pi,\ x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

und für alle x mit $3\cos(x) - \sin(x) = 0$. Letzteres ist äquivalent zu $\tan(x) = 3$. Im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ gibt es genau ein $x = x_0$, welches diese Gleichung erfüllt, nämlich

$$x_0 = \tan^{-1}(3) \approx 1.249.$$

Wegen der π-Periodizität der Tangensfunktion haben alle weiteren Lösungen die Form $x = x_0 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

3. Aufgabe

Da $1+t^2>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ ist der grösstmögliche Definitionsbereich $D_f=\mathbb{R}$. Wir haben für alle $t\in\mathbb{R}$,

$$f(-t) \;=\; \frac{1}{1+(-t)^2} \;=\; f(t).$$

Also ist f gerade. Um das Monotonieverhalten zu untersuchen, unterscheiden wir die Fälle $t\leq 0$ und $t\geq 0$. Für $0\leq t_1<t_2$ folgt $t_1^2<t_2^2$, also $1+t_1^2<1+t_2^2$. Das heisst

$$f(t_1) \;=\; \frac{1}{1+t_1^2} \;>\; \frac{1}{1+t_2^2} \;=\; f(t_2),$$

und f ist monoton fallend für $t\geq 0$. Falls $t_1<t_2\leq 0$, so folgt $1+t_1^2>1+t_2^2$ also

$$f(t_1) \;=\; \frac{1}{1+t_1^2} \;<\; \frac{1}{1+t_2^2} \;=\; f(t_2),$$

und daher ist f monoton wachsend für $t\leq 0$.

4. Aufgabe

(a) Wir suchen das kleinste P, sodass $f(x)=f(x+P)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Wir fordern also

$$\cos(4\pi x)\overset{!}{=}\cos(4\pi(x+P))=\cos(4\pi x+4\pi P),$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $4\pi P=2\pi$ ist, da der Kosinus die primitive Periode 2π besitzt und somit $\cos(4\pi x+2\pi)=\cos(4\pi x)$ ist. Die primitive Periode von f ist also $P=1/2$.

(b) Gesucht ist das kleinste P mit

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\overset{!}{=}\tan\left(\frac{\pi}{4}(x+P)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}P\right),$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $\frac{\pi}{4}P=\pi$ ist, da der Tangens die primitive Periode π besitzt. Die primitive von f ist also $P=4$.

(c) Gesucht ist das kleinste P mit

$$g(314x)\overset{!}{=}g(314(x+P))=g(314x+314P),$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $314P=1$ ist, da die Funktion g nach Aufgabenstellung die primitive Periode 1 besitzt. Die primitive Periode von f ist also $P=1/314$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Die Funktion f ist nur definiert für $\sin(x) \geq 0$. Dies ist hier nur für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ der Fall.

2. Ergebnis: (b).

Aus $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ erhalten wir zwei Gleichungen:

$$f(1) = b + c = 1 \quad \text{und} \quad f(2) = b + \frac{c}{2} = 2.$$

Dieses Gleichungssystem liefert dann $b = 3$ und $c = -2$. In diesem Fall, sagt man, dass die Funktion f die Fixpunkte 1 und 2 hat.