Lösung 5

1. Aufgabe

(a) Wenn wir uns die Folge genau anschauen gilt

$$a_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}\sin(2\pi) = 0, \dots$$

Das heisst, $(a_n)_n$ ist die Folge

$$1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, \dots$$

Da $\sin(x) \in [-1,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, haben wir also

$$-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzwert ist somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^9 kürzen) und sehen direkt

$$a_n = \frac{10n^{10} + 5n^5 + 1}{9n^9 + 6n^6 + 2n^2} = \frac{10n + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^9}}{9 + \frac{6}{n^3} + \frac{2}{n^7}}.$$

Auf der rechten Seite konvergiert der Nenner gegen 9, der Zähler jedoch divergiert nach ∞. Insgesamt ist also die Folge divergent nach ∞.

(c) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^5 kürzen) und sehen direkt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{18 + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{n^5}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^4}} = \frac{18 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = 6.$$

2. Aufgabe

(a) Es ist

$$\lim_{x\to4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = \lim_{x\to4} x + 3 = 7.$$

(b) Aus dem schon bekannten Limes $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ folgt sogleich

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left(\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = 1.$$

(c) Es gilt

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+7} - \sqrt{x})(\sqrt{x+7} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}} = \frac{7}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}}.$$

Der Nenner divergiert, so dass insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 0$$

folgt.

(d) Es gilt

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 1 + \sqrt{x},$$

und damit

$$\lim_{x\to1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to1} 1 + \sqrt{x} = 2.$$

3. Aufgabe

Zur Erinnerung: Eine Funktion f ist differenzierbar in $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist.

(a) Die Funktion f ist differenzierbar in $x_0 = 1$ mit Ableitung $f'(1) = 6$, denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} 2(x^2 + x + 1) = 6.$$

(b) Die Funktion f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn einerseits gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1,$$

andererseits aber

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

(c) Die Funktion f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit Ableitung $f'(0) = 0$, denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cdot x^2}{x} = \lim_{x \to 0} |x| \cdot x = 0.$$

(d) Die Funktion f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Die Veränderung in einem Zeitschritt ist gegeben dadurch, dass die Patientin eine neue Dosis D erhält und dass von der Menge m_n der Anteil pm_n abgebaut wird. Also zusammen

$$m_{n+1} = m_n - \underbrace{pm_n}_{\text{abgebaut}} + \underbrace{D}_{\text{neue Dosis}} .$$

2. Ergebnis: (c).

Da $x \mapsto 2x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x+1$ überall stetig sind, müssen wir nur noch die Stellen 0 und 1 betrachten. Wegen

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2x = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = f(0),$$

ist f im Punkt 0 stetig. Aber wegen

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1 = 2 \neq 1 = f(1),$$

ist f im Punkt 1 nicht stetig.

3. Ergebnis: (b).

Für die Stetigkeit an der Stelle 1 muss $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = a$ gelten. Für $x \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x^2)^2-1} = \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4}.$$