Lösung 6

1. Aufgabe

(a) Wir berechnen die Ableitung der angegebenen Funktion mit Hilfe der Quotientenregel und erhalten

$$f'_{B,K}(x) = \frac{B(x+K) - Bx}{(x+K)^2} = \frac{BK}{(x+K)^2}.$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass dies mit der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung übereinstimmt. Es gilt

$$\frac{K}{Bx^2}\,(f_{B,K}(x))^2 = \frac{K}{Bx^2}\,\frac{B^2x^2}{(x+K)^2} = \frac{BK}{(x+K)^2} = f'_{B,K}(x).$$

(b) Für den Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Bx}{x+K} = B \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+K} = B \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{K}{x}} = B.$$

Das Modell von Michaelis und Menten besagt also, dass mit steigender Substratkonzentration auch die Reaktionsgeschwindigkeit steigt. Dies ist möglich, bis zu einer Maximalgeschwindigkeit B (B ist somit die sogenannte Sättigungsgrenze).

(c) Für $0 < K_1 < K_2$ und $B, x > 0$ gilt

$$B > f_{B,K_1}(x) = \frac{Bx}{x+K_1} > \frac{Bx}{x+K_2} = f_{B,K_2}(x),$$

daher konvergiert $f_{B,K_1}(x)$ "schneller" gegen B als $f_{B,K_2}(x)$.

2. Aufgabe

(a) Die Funktion f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, da sie dort nicht einmal stetig ist. In der Tat ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

(b) Die Funktion f ist differenzierbar in $x_0 = 0$, denn die Kosinusfunktion ist überall differenzierbar und $x \mapsto \sqrt{x}$ ist differenzierbar in $x = \cos(x_0) = 1$. Aus der Kettenregel folgt für die Ableitung

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x_0)}}(-\sin(x_0)) = 0.$$

(c) Sei $(x_n)_n$ mit $x_n \neq 0$ eine beliebige gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge und $(y_n)_n$ mit $y_n = 1/x_n$ die Folge ihrer Kehrwerte (d.h. $\lim_{n\to\infty} |y_n| = \infty$). Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{|x_n|}} - 0}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-|y_n|}}{\frac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty} y_n e^{-|y_n|} = 0,$$

denn die Funktion $y \mapsto e^{-y}$ fällt für $y \to \infty$ schneller gegen 0 als jedes Polynom (d.h. $y \mapsto y$ oder auch Polynome von beliebig grossem Grad) gegen $\pm\infty$ divergiert. Damit ist f in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$.

3. Aufgabe

(a)

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 10x + 15x^4.$$

(b) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \left[\sqrt{8}x^{\frac{3}{2}}\right]' = \sqrt{8} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{8x} = 3\sqrt{2x}.$$

(c) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \left[(x + x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x + x^3)^{-\frac{2}{3}}(1 + 3x^2) = \frac{1 + 3x^2}{3\sqrt[3]{(x + x^3)^2}}.$$

(d) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x} \quad \text{oder} \quad f'(x) = \left[\ln(x^{\frac{2}{3}})\right]' = \left[\frac{2}{3}\ln(x)\right]' = \frac{2}{3x}.$$

(e) Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

(f) Kettenregel und Produktregel liefern

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{-\cos(x)\sin(x)}\right]' = e^{-\cos(x)\sin(x)} \cdot [-\cos(x)\sin(x)]' \\ &= (\sin^2(x) - \cos^2(x))e^{-\cos(x)\sin(x)}. \end{aligned}$$

(g) Quotientenregel liefert

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(h) Kettenregel (mehrfach) liefert

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}}(2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}}.$$

(i) Kettenregel (mehrfach) liefert

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot (\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}.$$

4. Aufgabe

(a) $f'(x) = (e^{x\ln(a)})' = a^x \ln(a)$.

(b) $f'(x) = (e^{x\ln(x)})' = x^x(\ln(x) + 1)$.

(c) $f'(x) = e^{e^x} e^x = e^{(e^x + x)}$.

(d) $f'(x) = \frac{\cos(e^x)}{\sin(e^x)}e^x = e^x \cot(e^x)$.

(e) $f'(x) = e^{(x + x^3 + x^5 + x^7)}(1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6)$.

(f) $f'(x) = (\ln(\ln(x\ln(x))))' = \frac{1 + \ln(x)}{x\ln(x)\ln(x\ln(x))}$.

(g) $f'(x) = 7\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) = \frac{7}{2x^{9/2}}(x + 1)^6(x - 1)$.

(h) $f'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$.

(i) $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}(\sin(x) + \cos(x) - \frac{\sin(x)}{2x})$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Für $x \in (0, \pi)$ ist $\sin(x) > 0$, und es gilt

$$f(x) = (\sin(x))^x = e^{\ln((\sin(x))^x)} = e^{x \ln(\sin(x))}.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln(\sin(x))} \left(\ln(\sin(x)) + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} \right) \\ &= (\sin(x))^x \left(\ln(\sin(x)) + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} \right) = (\sin(x) \ln(\sin(x)) + x \cos(x)) (\sin(x))^{x-1}. \end{aligned}$$

2. Ergebnis: (d).

Die gegebene Kurve ist der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Die Tangente im Punkt $(-1, 1)$ hat die Steigung $f'(-1)$ und mit $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ folgt $f'(-1) = 2$. Die Steigung der Tangente ist also 2, das heisst die Tangente hat die Form $y = 2x + d$. Der Punkt $(-1, 1)$ liegt auf der Tangente, wir erhalten also $1 = 2(-1) + d$ und damit $d = 3$.