Lösung 7

1. Aufgabe

(a) i) Für die zu betrachtende Funktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir als Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

An der Stelle $x_0 = 100$ ist somit $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$. Nach der Definition von

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

folgt mit $f(x_0) = \sqrt{100} = 10$,

$$p(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100) = \frac{1}{20}x + 5.$$

ii) Mit dem absoluten Fehler $\Delta f(x) = |p(x) - f(x)|$ und dem relativen Fehler $\Delta_r f(x) = \left|\frac{p(x) - f(x)}{f(x)}\right|$ erhalten wir (mithilfe eines Taschenrechners) folgende Tabelle der approximativen Werte:

x	$f(x)$	$p(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta_r f(x)$
101	10.0499	10.05	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$
105	10.2470	10.25	$3.05 \cdot 10^{-3}$	$2.98 \cdot 10^{-4}$
110	10.4881	10.50	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$

(b) Wir berechnen zuerst die Ableitungen:

i) $f'(x) = \left[(x + x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x + x^3)^{-\frac{2}{3}}(1 + 3x^2) = \frac{1 + 3x^2}{3\sqrt[3]{(x + x^3)^2}}.$

ii) $f'(x) = \left[\ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right]' = \left[\frac{2}{3}\ln(x)\right]' = \frac{2}{3x}.$

iii) $f'(x) = \left[e^{-\sin(x)}\right]' = -e^{-\sin(x)}\cos(x).$

iv) $f'(x) = \left[\frac{1}{1 + x^4}\right]' = \frac{-4x^3}{(1 + x^4)^2}.$

Um $p(x)$ für x_0 mit $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ zu berechnen, benötigen wir den Funktionswert und den Wert der Ableitung an der Stelle x_0:

Teil	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$p(x)$
i)	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}$	$\sqrt[3]{2} + \frac{4}{3\sqrt[3]{4}}(x - 1)$
ii)	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}(x - 1)$
iii)	1	-1	$1 - x$
iv)	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2} - (x - 1) = \frac{3}{2} - x$

2. Aufgabe

1. Die Funktion f ist ungerade. Deshalb wird im folgenden oft nur der Bereich $x > 0$ betrachtet.

2. $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\sin(x) = 0$ gilt, d.h. für $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

3. Zur Bestimmung der Extrema differenzieren wir f im Bereich $x > 0$ und erhalten

$$f'(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = 0$$

genau dann, wenn $\cos(x) = \sin(x)$ bzw. $\tan(x) = 1$ ist. Somit ist $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, wobei es sich bei geraden k um Maxima und bei ungeraden k um ein Minima handelt. Da

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

für alle $k \in 2\mathbb{N}$ gilt, f stetig ist und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (siehe 5.), liegt das absolute Maximum (für $x > 0$) bei $x = \frac{\pi}{4}$. Ähnlich erhalten wir, dass das absolute Minimum (für $x > 0$) bei $x = \frac{5\pi}{4}$ liegt.

Da f ungerade ist, können wir daraus schliessen dass $x = \frac{\pi}{4}$ das globale Maximum und $x = -\frac{\pi}{4}$ das globale Minimum sind.

4. Aus $f''(x) = -2e^{-x}\cos(x) = 0$ folgt $\cos(x) = 0$ und damit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Da die Sinusfunktion beschränkt ist und $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-|x|} = 0$ gilt, folgt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

6. Der Wertebreich von f für $x > 0$ ist

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right].$$

Da f ungerade ist, gilt

$$W_f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right].$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Die Linearisierung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist gegeben durch

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir berechnen dafür mit der Kettenregel $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$. Wir erhalten somit $f(x_0) = e^0 = 1$ und $f'(x_0) = 0$, also

$$p(x) = 1,$$

und insbesondere $p(2) = 1$.

2. Ergebnis: (b).

Die Linearisierung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist gegeben durch

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Hier gilt $f(x_0) = \frac{1}{2}$ und $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4}$. Dann ist

$$p(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) = 1 - \frac{1}{4}x.$$

3. Ergebnis: (c).

Das Vorzeichen der ersten Ableitung erlaubt keine Aussage über das Krümmungsverhalten von f. Zum Beispiel erfüllen

$$f_1(x) = x^2 \text{ und } f_2(x) = \sqrt{x}$$

auf $[1, 2]$ obige Annahmen, haben aber ein unterschiedliches Krümmungsverhalten.

4. Ergebnis: (d).

Wir suchen x_0 so, dass $f'(x_0) = 0$ gilt. Wir berechnen mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Bei $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ ist $f'(x_0) = \sqrt{3}$, bei $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ gleich 1, bei $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ gleich $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ und bei $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ gleich 0, also (d).