Lösung 8

1. Aufgabe

(a) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heisst streng monoton fallend, falls für alle $x, y \in D$ gilt

$$x < y \implies f(x) > f(y).$$

Eine (differenzierbare) Funktion f ist streng monoton fallend, falls ihre Ableitung f' negativ ist. Die Ableitung von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ ist $f'(x) = x^2 - 1$. Daher ist die Funktion f streng monoton fallend, falls

$$\begin{aligned} f'(x) = x^2 - 1 < 0 &\implies x^2 < 1 \\ \implies |x| < 1 &\implies x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Somit sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

(b) Da f im Intervall $(-1, 1)$ streng monoton fallend ist, ist $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ der grösste und $f(1) = -\dfrac{2}{3}$ der kleinste Wert von f auf $(-1, 1)$. Für $D = (-1, 1)$ ist der Wertebereich W von f damit

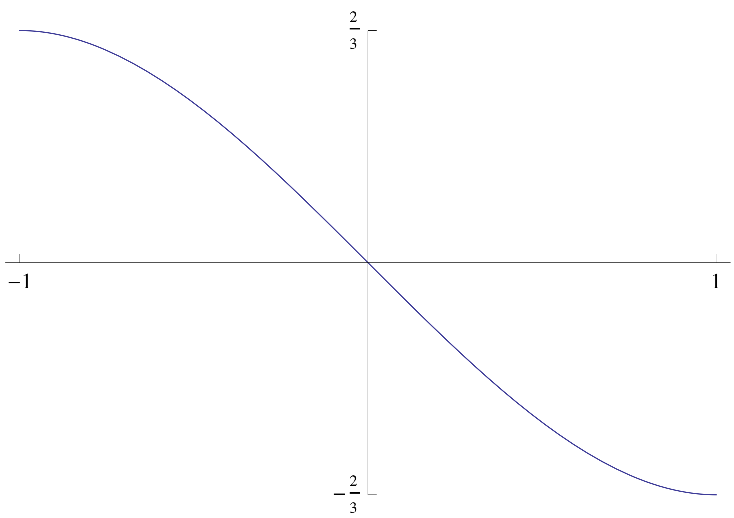
$$W = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Die Einschränkung von f auf (x_1, x_2) ist umkehrbar. Der Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$ von f^{-1} ist

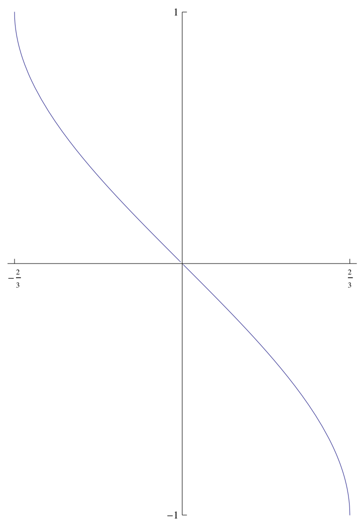
$$D_{f^{-1}} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

der Wertebereich ist $W_{f^{-1}} = (-1, 1)$.

Es sind



G_f



$G_{f^{-1}}$

(c) Wie in der Vorlesung folgt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)},$$

falls $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist also nicht differenzierbar in y_0, falls $f'(f^{-1}(y_0)) = 0$.

In unserem Beispiel folgt mit $f'(x) = x^2 - 1$, dass $x^2 = f^{-1}(y_0)^2 = 1$, also $f^{-1}(y_0) = \pm 1$. Dies sind die Grenzen des offenen Intervalls $W_{f-1} = (-1, 1)$, mit $y_{0,1} = f(1) = -\frac{2}{3}$ und $y_{0,2} = f(-1) = \frac{2}{3}$.

Diese Punkte liegen ausserhalb des Definitionsbereichs $W_{f^{-1}}$, und somit ist f^{-1} auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. Aus den Graphen sehen wir, dass f in den Punkten 1 und -1 waagrechte Tangenten hat, und dass f^{-1} in den Punkten y_1 und y_2 senkrechte Tangenten hat. Um $f^{-1}(0)$ zu berechnen, müssen wir die Gleichung

$$\frac{1}{3}x^3 - x = 0$$

lösen. Wir sehen, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist (die weiteren Nullstellen sind bei $\pm\sqrt{3}$, werden aber nicht berücksichtigt, da sie ausserhalb des Wertebereichs $W_{f^{-1}}$ liegen). Somit gilt $f^{-1}(0) = 0$. Aus $f'(x) = x^2 - 1$ folgt

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f^{-1}(0)^2 - 1} = \frac{1}{0^2 - 1} = -1.$$

2. Aufgabe

Für $x \geq 0$ lautet der Nettogewinn

$$g(x) = c_1 y_0 (1 - e^{-kx}) - c_2 x.$$

(a) Die erste Ableitung der Gewinnfunktion lautet

$$g'(x) = k c_1 y_0 e^{-kx} - c_2, \quad x \geq 0.$$

Um mögliche Kandidaten für ein Maximum zu bestimmen, setzen wir die erste Ableitung gleich Null und lösen nach x auf:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-kx} = \frac{c_2}{k c_1 y_0} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{c_2}{k c_1 y_0}\right)}{k}.$$

Hierbei ist folgende Fallunterscheidung bezüglich der Koeffizienten zu beachten:

- Sei zunächst $\frac{c_2}{k c_1 y_0} \in (0, 1)$. Dann ist der Kandidat für das Maximum strikt positiv und ein Düngereinsatz (falls tatsächlich ein Maximum vorliegen sollte) sinnvoll.
- Sei nun $\frac{c_2}{k c_1 y_0} \geq 1$. In diesem Fall ist die Funktion g monoton fallend (da die Ableitung für alle $x \geq 0$ kleiner oder gleich 0 ist) und wegen $g(0) = 0$ ist es daher gewinnmaximierend, überhaupt keinen Dünger einzusetzen.

Sei $\frac{c_2}{k c_1 y_0} \in (0, 1)$. Wir müssen nachweisen, dass ein Maximum an der Stelle $x^* = -\frac{\ln\left(\frac{c_2}{k c_1 y_0}\right)}{k}$ vorliegt. Dazu betrachten wir $g''(x) = -k^2 c_1 y_0 e^{-kx}$. Wegen

$$g''(x^*) = -k c_2 < 0$$

liegt eine lokale Maximalstelle bei x^* vor. Diese ist sogar global, denn

$$g(0) = c_1 y_0 (1 - 1) - c_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad g(x) \to -\infty, \quad \text{für } x \to \infty.$$

(b) Falls $\frac{c_2}{k c_1 y_0} \geq 1$ wird auch im Falle der Verdopplung von c_1, c_2 kein Dünger eingesetzt.

Sei also nun $\frac{c_2}{k c_1 y_0} \in (0, 1)$. Es ist offensichtlich, dass sich x^* nicht ändert, wenn sich c_1 und c_2 verdoppeln, denn

$$g_{\text{neu}}(x) = 2 g_{\text{alt}}(x).$$

Damit gilt

$$g'_{\text{neu}}(x) = 0 \Leftrightarrow 2 g'_{\text{alt}}(x) = 0 \Leftrightarrow g'_{\text{alt}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{c_2}{k c_1 y_0}\right)}{k}.$$

(c) Für grosse x verhält sich $g(x)$ wie die lineare Funktion $h(x) = -c_2 x + c_1 y_0$, d.h. $g(x) \approx h(x)$ für $x \to \infty$.

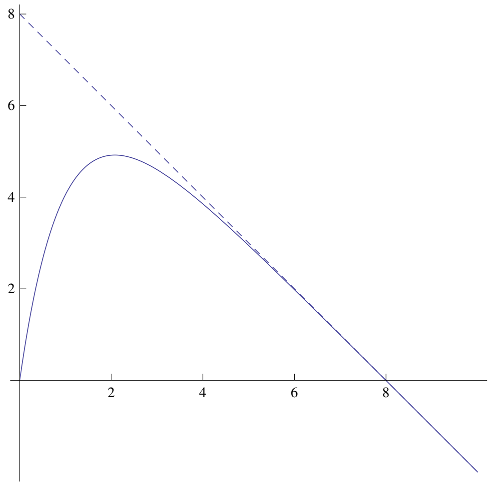


Abbildung 1: Gewinnfunktion und Grenzverhalten (gestrichelte Gerade) für $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $y_0 = 4$ und $k = 1$.

3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2019)

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 2x + 1}{3x^5 + 2x^4 + 4x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 + 3x^{-2} + 2x^{-4} + x^{-5}}{3 + 2x^{-1} + 4x^{-3} + x^{-5}} = \frac{4}{3}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

(c)

$$2x^3 - 8x^2 - 2x + 8 = 2(x-1)(x+1)(x-4) \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4.$$

(d)

$$f(x) = x^{x^2} = e^{x^2 \ln(x)} \Longrightarrow f'(x) = e^{x^2 \ln(x)}(2x\ln(x) + x) = x^{x^2}(2x\ln(x) + x) = x^{x^2+1}(2\ln(x) + 1).$$

(e)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3},\ \lim_{x\to 1}(1 + b\cos(\pi x)) = 1 - b,$$

$$\Longrightarrow 1 - b = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow b = \frac{2}{3}.$$

4. Aufgabe

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = -c\big(ae^{-ax} - be^{-bx}\big),\ x \geq 0. \tag{1}$$

(a) Nach (1) ist $f'(x) = 0$ äquivalent zu $ae^{-ax} = be^{-bx}$. Logarithmieren führt auf $\ln(a) - ax = \ln(b) - bx$ und damit zu

$$x = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} =: x^*.$$

Weiter ist $f'(x) > 0$ äquivalent zu $x < x^*$ und $f'(x) < 0$ ist äquivalent zu $x > x^*$. Daher ist f im Intervall $(0, x^*)$ monoton steigend und im Intervall (x^*, ∞) monoton fallend. Somit hat f bei x^* ein Maximum, und der maximale Wert von f ist

$$\begin{aligned} f(x^*) &= c\big(e^{-ax^*} - e^{-bx^*}\big) = c\big(1 - e^{-(b-a)x^*}\big)e^{-ax^*} = c\left(1 - e^{-\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right) e^{-\frac{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}} \\ &= c\left(1 - \frac{a}{b}\right) e^{-\frac{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}}. \end{aligned}$$

Das einzige Minimum von f ist bei $x = 0$, da $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$.

(b) Es soll gelten $f'(0) = (b-a)c = c$, also $b - a = 1$, sowie $x^* = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} = 1$, also $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = 1$. Daraus folgt $b = ea$, also $1 = b - a = a(e-1)$ und wir erhalten

$$a = \frac{1}{e-1}, \quad b = \frac{e}{e-1}.$$

(c) Wir benötigen die zweite Ableitung

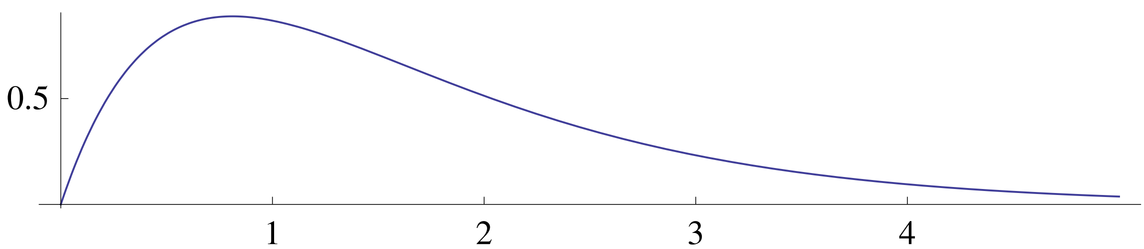
$$f''(x) = c\big(a^2e^{-ax} - b^2e^{-bx}\big). \tag{2}$$

Aus $f''(x) = 0$ folgt $a^2e^{-ax} = b^2e^{-bx}$ und auflösen nach x führt auf

$$x = \frac{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a} =: x^{**}.$$

Weiter gilt $f''(x) < 0$, falls $x < x^{**}$ und $f''(x) > 0$, falls $x > x^{**}$. Daher ist x^{**} ein Wendepunkt.

(d) Für $a = 1$, $b = 1.5$ und $c = 6$ erhalten wir den folgenden Graphen:



Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Die Regel von de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3 + x - 2 = 0$ und $x^2 - 3x + 2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{3 + 1}{2 - 3} = -4.$$

2. Ergebnis: (c).

Mit der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}\left(e^x(\sin(x) + \cos(x))\sqrt{x} - e^x \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{x}}\left(\sin(x) + \cos(x) - \frac{\sin(x)}{2x}\right). \end{aligned}$$