Lösung 9

1. Aufgabe

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
|F| &= \int_{-1}^{1} e^{-x} - x^2 e^{-x}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-x}\left(1-x^2\right)\,dx \\
&= -(1-x^2)e^{-x}\big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,dx \\
&= 0 - 2\left(-xe^{-x}\big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx\right) \\
&= 2xe^{-x}\big|_{-1}^{1} + 2e^{-x}\big|_{-1}^{1} \\
&= 2e^{-1} + 2e + 2e^{-1} - 2e \\
&= \frac{4}{e}.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

(a) $\int \frac{7}{x^6} - \frac{2}{x} + 1 + 2x^2\,dx = -\frac{7}{5x^5} - 2\ln|x| + x + \frac{2}{3}x^3 + C,$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(b) $\int \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + x^{-\frac{1}{10}} - x^{-\frac{5}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{9}x^{\frac{9}{10}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C,$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.,

(c) Mit zweifacher partieller Integration (Gleichungen mit $(*)$) folgt

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x)\,dx &\overset{(*)}{=} x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))\,dx \\
&= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} -x^2\cos(x) + 2\left(x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx\right) \\
&= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C \\
&= (2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + C,
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(d) Wir verwenden partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \frac{1}{(x+1)^4}\,dx &= x \cdot \frac{-1}{3(x+1)^3} - \int \frac{-1}{3(x+1)^3}\,dx \\
&= -\frac{x}{3(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \\
&= -\frac{x}{3(x+1)^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2(x+1)^2} + C \\
&= -\frac{2x + (x+1)}{6(x+1)^3} + C \\
&= -\frac{3x+1}{6(x+1)^3} + C,
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(e) Mit zweimaliger partieller Integration (Gleichungen $(*)$) finden wir

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos(x)\,dx &\overset{(*)}{=} -e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\sin(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} -e^{-x}\cos(x) - \Big(-e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)\,dx \Big) \\
&= -e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x) - \int e^{-x}\cos(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Der Term $\int e^{-x}\cos(x)\,dx$ taucht in der obigen Gleichung auf beiden Seiten auf (mit umgekehrtem Vorzeichen). Wir lösen die Gleichung nach $\int e^{-x}\cos(x)\,dx$ auf und erhalten (wir fügen noch die Integrationskonstante hinzu)

$$2\int e^{-x}\cos(x)\,dx = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

Also insgesamt

$$\int e^{-x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(f) Mit partieller Integration finden wir

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)\,dx &= \int \cos^2(x)\cos(x)\,dx \\
&= \cos^2(x)\sin(x) - \int (-2\cos(x)\sin(x))\sin(x)\,dx \qquad (1)\\
&= \cos^2(x)\sin(x) + 2\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Es bleibt das Integral auf der rechten Seite auszurechnen. Wir wenden wieder partielle Integration an und finden

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x)\sin(x) - \int 2\sin(x)\cos(x)\cos(x)\,dx \\
&= \sin^3(x) - 2\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Rechts und links der Gleichung (2) taucht das gleiche Integral auf. Bringen wir es auf die gleiche Seite der Gleichung, so finden wir

$$3\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \sin^3(x) \quad \text{und somit} \quad \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C.$$

Dies können wir in (1) einsetzen und bekommen

$$\int \cos^3(x)\,dx = \cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\sin^3(x) + C.$$

Nach Wunsch lässt sich das noch vereinfachen indem wir $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ verwenden. Und zwar

$$\int \cos^3(x)\,dx = (1 - \sin^2(x))\sin(x) + \frac{2}{3}\sin^3(x) + C = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe (Prüfung Winter 2014)

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-1.$$

(c) Durch die Substitution $u=\ln(x)$ erhalten wir dass

$$\int_1^2 \sin\left(\ln(x)\right)\,dx=\int_0^{\ln(2)}\sin(u)\,e^u\,du.$$

Durch zweifaches partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)}\sin(u)\,e^u\,du &= \sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}-\int_0^{\ln(2)}\cos(u)\,e^u\,du\\ &= \sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}-\cos(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}-\int_0^{\ln(2)}\sin(u)\,e^u\,du\end{aligned}$$

Deshalb schliessen wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)}\sin(u)\,e^u\,du &= \frac{1}{2}\left[\sin(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}-\cos(u)\,e^u\Big|_0^{\ln(2)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(2\sin\left(\ln(2)\right)-2\cos\left(\ln(2)\right)+1\right)\\ &= \sin\left(\ln(2)\right)-\cos\left(\ln(2)\right)+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(d) Beobachte, dass

$$x^3-3x^2-10x+24=(x-2)(x+3)(x-4).$$

Daraus folgt $x_1=2$, $x_2=-3$ und $x_3=4$.

(e) Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

hat als Ableitung

$$f'(x)=x^2+3x.$$

Durch Nullsetzen finden wir die Kandidaten für Extrema $x\in\{0,-3\}$. Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f(0)=0,\quad f(-3)=\frac{9}{2}.$$

Mit $f''(0)=3>0$ und $f''(-3)=-3<0$ folgern wir

$$(x_{min},y_{min})=(0,f(0))=(0,0)\,,\qquad (x_{max},y_{max})=(-3,f(-3))=\left(-3,\frac{9}{2}\right).$$

(f) Da $\sin(x)$ eine stetige Funktion ist, ist die Funktion f stetig auf $[0,\infty)$ genau dann wenn $a=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Aufgabe (Prüfung Winter 2019)

(a) Es gilt

$$\int \frac{6x^2+2}{x^3+x}dx = 2\ln(x^3+x) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Der Trick ist hier, dass $\dfrac{6x^2+2}{x^3+x} = 2 \cdot \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$, und im Zähler die Ableitung des Nenners steht.

(b) Zuerst berechnen wir (mit Partieller Integration oder Substitution) eine Stammfunktion

$$\int e^{(x+2)}(x+2)dx = e^{(x+2)}(x+1) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dann ist das bestimmte Integral gegeben durch

$$\int_0^1 e^{(x+2)}(x+2)\,dx = e^{(x+2)}(x+1)\Big|_0^1 = e^{(1+2)}(1+1) - e^{(0+2)}(0+1) = 2e^3 - e^2.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und $a = 3$. Alternativ kann man das Integral direkt berechnen.

$$\int_3^x \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_3^x = -\cos(x) + \cos(3).$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos(x) + \cos(3))' = \sin(x)$.

2. Ergebnis: (d).

Die Integrationskonstante fehlt! Gleichungen für Stammfunktionen gelten immer nur bis auf eine Integrationskonstante; die falsche Rechnung illustiert, was andernfalls passieren kann.