D–BIOL D–CHAB D–HEST

# Probeprüfung / Selbsteinstufungstest Mathematik I

401-0291-00L

# Lösung

# Multiple Choice

**1. Aufgabe** **[20 Punkte]**

**MC1. Ergebnis:** (A).

Die Funktion $y \mapsto \ln(y)$ ist nur für $y > 0$ definiert. Das bedeutet, dass $\ln(x^3+1)$ nur für $x^3+1 > 0$ definiert ist. Zuletzt gilt

$$x^3 + 1 > 0 \iff x^3 > -1 \iff x > -1.$$

**MC2. Ergebnis:** (B).

Die Funktion $y \mapsto \sqrt[4]{y}$ ist nur für $y \geq 0$ definiert. Das bedeutet, dass $g(x) = \sqrt[4]{\ln(x)}$ nur für $\ln(x) \geq 0$ definiert ist. Zuletzt gilt

$$\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

Der maximale Definitionsbereich der Funktion $g(x) = \sqrt[4]{\ln(x)}$ ist daher $[1, \infty)$.

**MC3. Ergebnis:** (C).

Mit der Produktregel folgt

$$f'(x) = (\cos(x))'(1-x) + \cos(x)(1-x)' = -\sin(x)(1-x) - \cos(x) = (x-1)\sin(x) - \cos(x).$$

**MC4. Ergebnis:** (C).

Da $x > 0$ können wir die logarithmische Ableitung anwenden. Auf beiden Seiten von $f(x) = x^x$ bilden wir den Logarithmus und leiten ab, um zu erhalten

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$
$$[\ln(x^x)]' = [x \ln(x)]' = \ln(x) + 1.$$

Gleichsetzen und multiplizieren mit $f(x) = x^x$ liefert

$$f'(x) = x^x (\ln(x) + 1).$$

**MC5. Ergebnis:** (A).

Wir sind in der Situation $\frac{\infty}{\infty}$ und möchten die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}+41x}{x^3+42x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}+41}{3x^2+42} = 0.$$

**MC6. Ergebnis:** (C).

Wir sind in der Situation $\frac{0}{0}$ und möchten die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2-(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{\cos(x)} = \frac{2-(1-0)}{1} = 1.$$

**MC7. Ergebnis:** (B).

Der Fixpunkt $\widetilde{x}$ muss die Gleichung

$$\widetilde{x} = \arccos(\sin(\widetilde{x}))$$

erfüllen. Daher erhalten wir

$$\cos(\widetilde{x}) = \sin(\widetilde{x}),$$

und nur $\widetilde{x} = \dfrac{\pi}{4}$ erfüllt diese Bedingung.

**MC8. Ergebnis:** (C).

Die Funktion $f$ ist glatt und es gilt

$$f'(x) = -2\sin(x) \text{ und } f''(x) = -2\cos(x).$$

Wir sehen somit, dass $f$ offensichtlich nicht konvex ist, da $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht erfüllt ist. Ferner gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -2$, was bedeutet, dass der Punkt $x_0 = 0$ kein lokales Minimum, sondern ein lokales Maximum ist. Weiterhin gilt $f'(\pi) = 0$ und $f''(\pi) = 2$, sodass $x_0 = \pi$ ein lokales Minimum ist. Schliesslich kann der Punkt $x_0 = 0$ aufgrund von $f''(0) = -2$ kein Wendepunkt sein.

**MC9. Ergebnis:** (D).

Da $f$ auf $(-2, 1)$ konkav ist, haben wir $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (-2, 1)$. Keine der anderen Optionen trifft zu, da $f$ offensichtlich weder monoton noch konvex ist.

**MC10. Ergebnis:** (C).

Da $f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$ ist die Funktion $f$ wachsend und konvex. Wir erhalten somit

$$a < b \implies f(a) \leq f(b).$$

Es ist klar, dass es nicht notwendigerweise einen maximalen Punkt geben muss, indem man zum Beispiel $f(x) = \exp(x)$ wählt. Das gleiche Gegenbeispiel zeigt, dass $f$ nicht unbedingt konkav oder monoton fallend sein muss.

# Aufgaben

## 2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2020) [5 Punkte]

(a) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(x^2) - \ln(2x)$.

**Lösung:**

Zuerst schreiben wir mit dem Logarithmusgesetzen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ln(x) - \ln(2x) \\ &= 2\ln(x) - (\ln(2) + \ln(x)) \\ &= 2\ln(x) - \ln(2) - \ln(x) \\ &= \ln(x) - \ln(2), \end{aligned}$$

damit berechnen wir dann

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alternativ ergibt sich dies auch mit der Kettenregel.

(b) [**2 Punkte**] Betrachten Sie die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = xe^{-3(x-1)}$. Berechnen Sie die zwei Fixpunkte $\widetilde{x}_1$ und $\widetilde{x}_2$ der Funktion $h$.

**Hinweis:** Ein Punkt $\widetilde{x}$ ist ein Fixpunkt von $h$, wenn $h(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ gilt.

**Lösung:**

Wir müssen die Fixpunktgleichung $x = h(x)$ lösen. Diese lässt sich schreiben, als

$$0 = x(1 - e^{-3(x-1)}).$$

Diese ist erfüllt, wenn einer der Faktoren null ist. Den ersten Fixpunkt finden wir sofort, nämlich

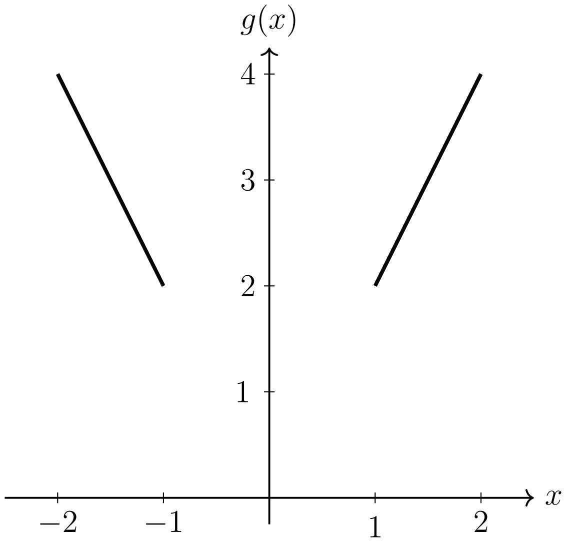
$$\widetilde{x}_1 = 0.$$

Für den zweiten Fixpunkt ist somit $\widetilde{x}_2 \neq 0$ und folglich muss $0 = 1 - e^{-3(\widetilde{x}_2 - 1)}$ gelten. Also $3(\widetilde{x}_2 - 1) = 0$ und deshalb ist

$$\widetilde{x}_2 = 1.$$

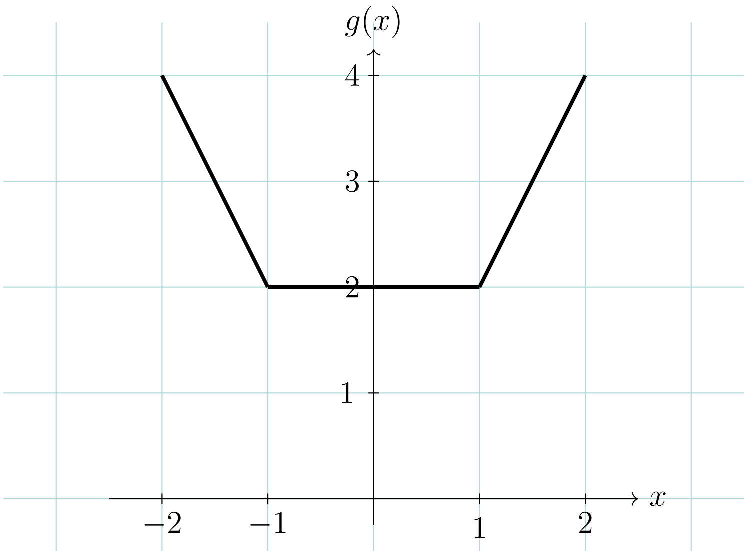
Betrachten Sie nun die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x - 1| + |x + 1|$.

(c) **[1 Punkt]** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g$ für $x \in [-2, 2]$. Unten finden Sie ein Ausschnitt des Graphen für $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$.




**Lösung:**

Der Graph von $g$ auf $[-2, 2]$ sieht wie folgt aus.




(d) **[1 Punkt]** Geben Sie die Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, in denen die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **nicht** differenzierbar ist.

**Lösung:**

Die Funktion $g$ ist in den Punkten $\{-1, 1\}$ nicht differenzierbar. In allen anderen Punkten schon.

## 3. Aufgabe (Prüfung Winter 2019) [5 Punkte]

Betrachten Sie den Limes $L = \lim_{x\to\pi} \frac{x\sin(x)}{x-\pi}$.

(a) [**1 Punkt**] Berechnen Sie $L$.
**Lösung:**

Wir verwenden de l'Hôpital und sehen

$$L = \lim_{x\to\pi} \frac{x\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x) + x\cos(x)}{1} = -\pi.$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x(x^3 - 1)$.

(b) [**0.5 Punkte**] Berechnen Sie $f(1)$.
**Lösung:**

Es gilt

$$f(1) = e(1^3 - 1) = 0.$$

(c) [**1 Punkt**] Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f$.
**Lösung:**

Mit der Produktregel erhalten wir $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$.

Betrachten Sie zuletzt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3 - 7x^2 + 13x$.

(d) [**1.5 Punkte**] Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion $g$.
**Lösung:**

Um die Fixpunkte zu bestimmen, lösen wir die Fixpunktlgleichung $x^3 - 7x^2 + 13x = x$. Deren Lösungen sind die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 = x(x^2 - 7x + 12).$$

Die Nullstelle $x_1 = 0$ liest sich direkt ab, und die beiden anderen $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ folgen als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$.

(e) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie den grösstmöglichen Intervall $(a, b)$, sodass die Funktion $g$ auf $(a, b)$ streng monoton fallend ist.

**Lösung:**

Wir berechnen die Nullstellen von $g'(x) = 3x^2 - 14x + 13$ mit $\dfrac{7 \pm \sqrt{10}}{3}$.
Damit folgt

$$a = \frac{7 - \sqrt{10}}{3} \text{ und } b = \frac{7 + \sqrt{10}}{3}.$$

Zwischen diesen ist die Ableitung negativ und damit die Funktion streng monoton fallend. Sonst haben wir $g'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$.