Serie 6

1. Aufgabe

In der Enzymkinetik spielt die *Michaelis-Menten-Funktion* eine wichtige Rolle. Sie beschreibt die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit y von der Substratkonzentration x (bei konstanter Enzymkonzentration). Für die Konstanten $B, K > 0$ ist die Michaelis-Menten-Funktion $f_{B,K}$ definiert durch

$$y = f_{B,K}(x) = \frac{Bx}{x+K}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_{B,K}$ die Gleichung

$$f'_{B,K}(x) = \frac{K}{Bx^2}\left(f_{B,K}(x)\right)^2$$

für alle $x > 0$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f_{B,K}(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Seien $K_2 > K_1 > 0$. Welche der Funktionen f_{B,K_1} und f_{B,K_2} konvergiert "schneller" gegen den Grenzwert für $x \to \infty$?

2. Aufgabe

Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen f jeweils, ob diese im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ mit $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. D gibt jeweils den Definitionsbereich der Funktion an.

(a) $f(x) = \frac{3}{x} + 1 - 5x^2 + 3x^5$, $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) $f(x) = \sqrt{8x^3}$, $\quad D = (0, \infty)$,

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^3}$, $\quad D = (0, \infty)$,

(d) $f(x) = \ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$, $\quad D = (0, \infty)$,

(e) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, $\quad D = (0, \infty)$,

(f) $f(x) = e^{-\cos(x)\sin(x)}$, $\quad D = \mathbb{R}$,

(g) $f(x) = \tan(x)$, $\quad D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(h) $f(x) = \sqrt{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$, $\quad D = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,

(i) $f(x) = \ln\left(\ln(\ln(x))\right)$, $\quad D = (e, \infty)$.

4. Aufgabe

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = a^x, a > 0.$

(b) $f(x) = x^x,$

(c) $f(x) = e^{e^x},$

(d) $f(x) = \ln(\sin(e^x)),$

(e) $f(x) = e^x e^{x^3} e^{x^5} e^{x^7},$

(f) $f(x) = \ln(\ln(\ln(x^x))),$

(g) $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7,$

(h) $f(x) = \sin(\ln(x)),$

(i) $f(x) = \dfrac{e^x \sin(x)}{\sqrt{x}}.$

Abgabe : Vor **Samstag**, den 19. Oktober um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe “Weiss ich nicht.” So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (\sin(x))^x$. Bestimmen Sie die Ableitung $f' : (0, \pi) \to \mathbb{R}$.

(a) $f'(x) = x\,(\sin(x))^{x-1}$,

(b) $f'(x) = \cos(x)\,x\,(\sin(x))^{x-1}$,

(c) $f'(x) = (\sin(x)\ln(\sin(x)) + x\cos(x))\,(\sin(x))^{x-1}$,

(d) $f'(x) = (\sin(x)\ln(\sin(x)) - x\cos(x))\,(\sin(x))^{x-1}$,

(e) Die Ableitung existiert nicht für alle $x \in (0, \pi)$.

2. Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = \dfrac{1}{x^2}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$?

(a) $y = x$,

(b) $y = x + 2$,

(c) $y = 2x - 1$,

(d) $y = 2x + 3$,

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Abgabe : Vor **Samstag**, den 19. Oktober um 12 Uhr über Echo.