Serie 8

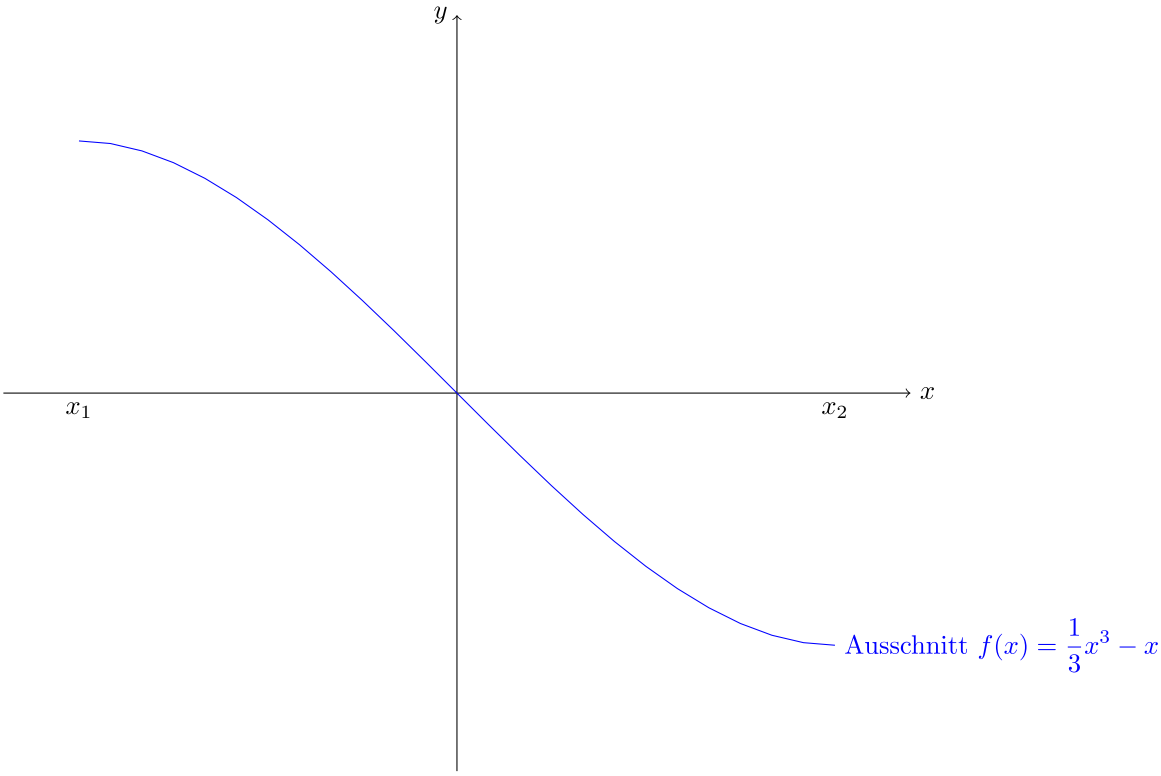
1. Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

(a) Bestimmen Sie den grösstmöglichen Intervall (x_1, x_2), sodass die Funktion f auf (x_1, x_2) streng monoton fallend ist.

(b) Der Graph von f in diesem Ausschnitt ist



Skizzieren Sie den Graphen von f^{-1}.

(c) Wo ist f^{-1} differenzierbar? Bestimmen Sie $(f^{-1})'(0)$.

2. Aufgabe

Der Ertrag $f(x)$ einer Pflanzensorte bei Düngereinsatz x folgt näherungsweise dem Gesetz von Mitscherlich

$$f(x) = y_0(1 - e^{-kx}),$$

wobei $y_0 > 0$ und $k > 0$ sorten- und bodenabhängige Konstanten sind. Wenn c_1 und c_2 die Preise von der Sorte und dem Dünger bezeichnen, beträgt der Nettogewinn nach Düngereinsatz

$$g(x) = c_1 f(x) - c_2 x.$$

(a) Bei welchem Düngereinsatz x^* erzielen Sie den maximalen Gewinn?

(b) Wie verändert sich x^*, wenn sich c_1 und c_2 verdoppeln?

(c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, welcher den Gewinn in Abhängigkeit des Düngereinsatzes darstellt, für $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $y_0 = 4$ und $k = 1$.

3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2019)

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5+3x^3+2x+1}{3x^5+2x^4+4x^2+1}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\sin(x)}.$$

(c) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x^3-8x^2-2x+8$ an.

(d) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=x^{x^2}$ und $x>0$.

(e) Seien $b\in\mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^3-1} & \text{für } x>1, \\ 1+b\cos(\pi x) & \text{für } x\leq 1. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x=1$ stetig ist?

4. Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion f mit

$$f(x)=c\big(e^{-ax}-e^{-bx}\big),\ x\geq 0.$$

Dabei sind a, b, c positive Konstanten mit $a<b$.

(a) Wo wächst die Funktion, wo fällt sie, an welchen Stellen sind Maxima und Minima?

(b) Bestimmen Sie a und b so, dass f bei $x=1$ ein Maximum hat und $f'(0)=c$ erfüllt.

(c) Hat der Graph von f Wendepunkte? Wenn ja, wo?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f für $a=1$, $b=1.5$ und $c=6$.

Abgabe : Vor **Samstag**, den 2. November um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Ubungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) korrekt angewendet,

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen beschreiben,

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben,

(d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

2. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{e^x \sin(x)}{\sqrt{x}}$. Bestimmen Sie die Ableitung $f' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(a) $f'(x) = -2\sqrt{x}e^x \cos(x)$,

(b) $f'(x) = \dfrac{e^x \sin(x)}{\sqrt{x}} \left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)$,

(c) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} \left(\sin(x) + \cos(x) - \dfrac{\sin(x)}{2x}\right)$,

(d) Die Ableitung existiert nicht für alle $x \in (0,\infty)$.

Abgabe : Vor **Samstag**, den 2. November um 12 Uhr über Echo.