Aufgaben und Lösungsvorschlag

Die folgenden Hinweise sind nützlich, um bestimmte Aufgaben dieser Prüfung zu lösen.

Hinweise:

- Für jedes Vektorfeld $X \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X.$$

- Sei $r \in (0, \infty)$. Wir schreiben $S_r^2(0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|x\| = r \right\}$. Für jede stetige Funktion $f : S_r^2(0) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{S_r^2(0)} f \, dA = r^2 \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi f \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} d\varphi \right) \sin\theta \, d\theta.$$

- $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos^2\psi \, d\psi = \pi$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\psi \, d\psi = \frac{4}{3}$

1. Boxaufgaben

Instruktionen für diesen Teil der Prüfung:

- Tragen Sie Ihre Lösung zu jeder Aufgabe in die Tabelle in der Antwortheft unter Aufgabe 1 ein.
- Tragen Sie jeweils **nur das Endresultat** ein. Nur dieses wird bewertet. Sie brauchen nichts zu begründen.
- **Text ausserhalb der Tabelle wird bei der Korrektur nicht berücksichtigt.**

1.A1 [2 Punkte] (Eigenschaften einer PDG) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x, y. (Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ als (x, y). Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.) Wir betrachten die folgende PDG (partielle Differentialgleichung) für eine Funktion u auf $\mathbb{R}^2$:

$$x^2 + y^2 + u_y + uu_x = 0.$$

(i) Geben Sie die Ordnung der PDG an.

(ii) Geben Sie an, ob die PDG linear ist.

(iii) Falls die PDG linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.

Lösung:

(i) (1 pt) Die Ordnung der PDG ist 1.

(ii) (1 pt) Die PDG ist nicht linear.

1.A2 [2 Punkte] (Typ einer PDG) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ als x_1, x_2, x_3 und betrachten die folgende PDG für eine Funktion u auf $\mathbb{R}^3$:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = u_{x_3x_3}. \tag{1}$$

(i) Ist diese PDG elliptisch?

(ii) Ist sie hyperbolisch?

Lösung:

(i) Die PDG ist nicht elliptisch.

(ii) Sie ist hyperbolisch.

Begründung: Wir schreiben $t := x_3$. Die PDG (1) nimmt durch Verschieben von Termen die Form

$$u_{tt} + Lu = f$$

an, wobei

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i u_{x_i} + cu, \qquad A(x) := \big(a_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{2} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix $A(x)$ symmetrisch und positiv definit. Daher ist die PDG (1) hyperbolisch.

Da die PDG hyperbolisch ist, ist sie nicht elliptisch.

1.A3 [2 Punkte] (Anfangswertproblem) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x. Bestimmen Sie die Lösung $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, && \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) &= e^x, && \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(t=0,x) &= 0, && \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

$u(t,x) = \frac{e^{x+3t} + e^{x-3t}}{2}$, $\forall (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$

Begründung: Es handelt sich hierbei um ein Anfangswertproblem für die räumlich 1-dimensionale Wellengleichung mit

$$c = 3, \qquad u_0(x) := e^x, \qquad v_0 \equiv 0.$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist die Lösung dieses Problems durch die d'Alembertsche

Formel gegeben:

$$u(t,x) := \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy$$
$$= \frac{e^{x+3t}+e^{x-3t}}{2} + 0.$$

1.A4 **[2 Punkte]** **(zwei Integrale)** Wir definieren die Funktion

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad g(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(e^{x^2}\right)} e^{-iyx} dx.$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy.$$

Lösung:

$f(x) = e^{-\left(e^{x^2}\right)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Begründung: Wir definieren

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad h(x) := e^{-\left(e^{x^2}\right)}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} g &= \widehat{h}, \\ f &= \check{g} \\ &= \check{\widehat{h}} \\ &= h, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt einen Satz aus der Vorlesung über die Fourierrücktransformation angewendet haben. Es gilt also

$$f(x) = h(x) = e^{-\left(e^{x^2}\right)}.$$

1.A5 **[2 Punkte]** **(Fouriertransformierte)** Sei $f \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{C})$ eine Funktion, sodass f, f', f'' absolut integrierbar sind und $f(x), f'(x), f''(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen 0 konvergieren. Drücken Sie die Fouriertransformierte von f''' mittels der Fouriertransformierten von f aus. Vereinfachen Sie das Resultat.

Lösung:

$\widehat{f'''}(\xi) = -i\xi^3 \widehat{f}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

Begründung: Gemäss einem Satz aus der Vorlesung über die Fouriertransformation gilt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{f'''}(\xi) &= i\xi \widehat{f''}(\xi)\\ &= (i\xi)^2 \widehat{f'}(\xi)\\ &= (i\xi)^3 \widehat{f}(\xi)\\ &= -i\xi^3 \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

1.A6 [3 Punkte] (asymptotisches Verhalten einer Lösung) Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$[0, 2\pi) \ni x \mapsto |x - \pi| \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die Lösung $u \in C^2\Big((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$ des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(t,y) &\to v(x) \quad \text{für} \quad (t,y) \to (0,x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\Big(t, x+2\pi\Big) &= u(t,x), \qquad \forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Konvergiert $u(t,\pi)$ für $t \to \infty$ gegen eine reelle Zahl? Falls ja, gegen welche?

Lösung:

Ja, gegen $\frac{\pi}{2}$.

Begründung (nicht Teil der Aufgabenstellung): Gemäss einem Satz in der Vorlesung ist u gegeben durch

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty,\dots,\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx}.$$

Analog zu einem Argument in der Vorlesung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t_0, sodass für jedes $t \geq t_0$ gilt

$$\left| \sum_{0 \neq k=-\infty,\dots,\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t,x) \to \widehat{v}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x - \pi| dx = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (x-\pi) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2. Multiple-Choice-Aufgaben

Instruktionen für diesen Teil der Prüfung:

- Tragen Sie Ihre Antworten in den Multiple-Choice-Antwortbogen ein.
- Es ist jeweils **genau eine** Antwort korrekt: Für genau die richtige Antwort gibt es je nach Aufgabe 1, 2 oder 3 Punkte. Wenn bei einer Aufgabe keine Antwort markiert ist, die falsche Antwort markiert ist oder mehrere Antworten markiert sind gibt es 0 Punkte.

2.MC1 [2 Punkte] (iteriertes Integral) Wodurch ist das folgende iterierte Integral gegeben?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) e^{-i\xi x} dx$$

(A) $\widehat{x \mapsto e^{-x^2}}(\xi)$

(B) $(\widehat{f} * \widehat{f})(\xi)$, wobei $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$ und $*$ die Faltung zweier Funktionen bezeichnet

(C) $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - i\xi x} dx \right)^2$

(D) durch keinen der obigen Ausdrücke

Lösung:

(C)

Begründung: Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f * f)(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \widehat{f * f}(\xi) \\
&= (\widehat{f}\widehat{f})(\xi) \qquad \text{(Satz aus der Vorlesung, Faltung und Fouriertransformation)} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - i\xi x} \right)^2 .
\end{aligned}$$

2.MC2 [3 Punkte] (Existenz einer Lösung) Wir schreiben t, x für die Standardkoordinaten in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Welches der folgenden Rand- und Anfangswertprobleme besitzt **keine** Lösung $u \in C^2(U, \mathbb{R})$, sodass

$$|u(t,x)| \le t + e^{x^2}, \qquad \forall (t,x) \in U?$$

(A)

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \qquad & \text{auf } U := (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(t,y) \to v(x) \qquad & \text{für } (t,y)\to(0,x), \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \end{aligned}$$

wobei

$$v(x) := \begin{cases} e^x, & \text{falls } x>0, \\ 0, & \text{falls } x=0, \\ -e^{-x}, & \text{falls } x<0. \end{cases}$$

(B)

$$\begin{aligned} u_t + u_{xx} = 0 \qquad & \text{auf } U := (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(t,y) \to v(x) \qquad & \text{für } (t,y)\to(0,x), \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei

$$v(x) := \begin{cases} 1-|x|, & \text{falls } |x|\le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(C)

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} \qquad & \text{auf } U := (0,\infty)\times(0,1), \\ u(t,x) \to t \qquad & \text{für } x\to 0, \qquad \forall t\in(0,\infty), \\ u(t,x) \to t \qquad & \text{für } x\to 1, \qquad \forall t\in(0,\infty) \end{aligned}$$

(D)

$$\begin{aligned} u_t + u_{xx} = 0 \qquad & \text{auf } U := (0,\infty)\times(0,1), \\ u(t,x) \to t \qquad & \text{für } x\to 0, \qquad \forall t\in(0,\infty), \\ u(t,x) \to t \qquad & \text{für } x\to 1, \qquad \forall t\in(0,\infty) \end{aligned}$$

Lösung:

(B)

Begründung dafür, dass (B) keine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften besitzt: Sei $u\in C^2(U,\mathbb{R})$ eine Funktion, sodass

$$\begin{aligned} u_t + u_{xx} = 0 \qquad & \text{auf } U := (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ |u(t,x)| \le t + e^{x^2}, \qquad & \forall (t,x)\in U. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\widetilde{u} : \widetilde{U} := (0,1)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \widetilde{u}(\widetilde{t},x) := u(-\widetilde{t}+1,x). \tag{2}$$

Diese Funktion erfüllt $\widetilde{u}\in C^2(\widetilde{U},\mathbb{R})$,

$$\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \widetilde{u}_{xx} \qquad \text{auf } \widetilde{U}, \tag{3}$$

$$|\widetilde{u}(\widetilde{t},x)| \le 1 + e^{x^2} \le 2e^{x^2}, \qquad \forall (\widetilde{t},x)\in\widetilde{U}. \tag{4}$$

Wir definieren den Wärmeleitungskern als die Funktion

$$K : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad K(t, x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Wir definieren

$$\widetilde{w} : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{w}(\widetilde{t}, x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(\widetilde{t}, x - y) u(1, y)\, dy.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\widetilde{u}(\widetilde{t}, y) \to u(1, x)$ für $(\widetilde{t}, y) \to (0, x)$. Daher folgt aus einem Satz aus der Vorlesung (Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$, Eindeutigkeit der Lösung) und (3,5), dass

$$\widetilde{u} = \widetilde{w} \qquad \text{auf } \widetilde{U}. \tag{5}$$

Gemäss dem gleichen Satz ist $\widetilde{w}$ glatt. Insbesondere ist $\widetilde{w}(1, \bullet) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Da die Funktion v nicht differenzierbar ist, gilt daher $\widetilde{w}(1, \bullet) \neq v$. Wegen Stetigkeit von $\widetilde{w}$ gibt es daher ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\widetilde{w}(\widetilde{t}, x_0) \not\to v(x_0) \qquad \text{für } \widetilde{t} \nearrow 1.$$

Wegen (6,2) gilt

$$u(t, x_0) \not\to v(x_0) \qquad \text{für } t \to 0, \qquad \text{also} \qquad u(t, y) \not\to v(x_0) \qquad \text{für } (t, y) \to (0, x_0).$$

Daher besitzt (B) keine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften.

Grund dafür, dass (A) eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften besitzt: Satz aus der Vorlesung (Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$)

Lösung für (C) mit den gewünschten Eigenschaften: $u(t, x) := t + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

Lösung für (D) mit den gewünschten Eigenschaften: $u(t, x) := t - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$

*Die folgenden Informationen beziehen sich auf die Fragen **2.MC3** und **2.MC4**.*

(Maxwell-Gleichungen im Vakuum, Wellengleichung) Die vier Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und das Magnetfeld $\mathbf{B}$ sind gegeben durch:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{9}$$

Wir betrachten den Fall eines Vakuums, d. h., $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$.

2.MC3 [2 Punkte] Aus welchen Maxwell-Gleichungen folgt, dass **E** die Wellengleichung löst[1]?

(A) (7,8,9)
(B) (7,8,10)
(C) (7,9,10)
(D) (8,9,10)

Lösung:

(C)

2.MC4 [2 Punkte] Aus welchen Maxwell-Gleichungen folgt, dass **B** die Wellengleichung löst?

(A) (7,8,9)
(B) (7,8,10)
(C) (7,9,10)
(D) (8,9,10)

Lösung:

(D)

*Die folgenden Informationen beziehen sich auf die Fragen **2.MC5** und **2.MC6**.*

(Laplacegleichung auf einem Ball) Wir schreiben

$$B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - x_0\| < r\}$$

und

$$\overline{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - x_0\| \leq r\}\,.$$

Sei $u \in C^2\left(\overline{B}_2^3(0), \mathbb{R}\right)$ eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{auf } B_2^3(0), \\ u(x) &= x_1^2 && \text{auf } \partial B_2^3(0). \end{aligned}$$

(x_1 bezeichnet die erste Komponente von x.)

2.MC5 [2 Punkte] $u(0)$ ist gegeben durch

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) 1
(D) $\frac{4}{3}$

Lösung:

[1] Damit meinen wir, dass jede Komponente von **E** die Wellengleichung löst.

(D)

Begründung: Gemäss einem Hinweis gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S_2^2(0)} u\,dA &= 2^2 \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} u \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\sin\theta \\ 2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} d\varphi \right) \sin\theta\,d\theta \\
&= 4 \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2^2 \cos^2\varphi\,d\varphi \right) \sin^3\theta\,d\theta \\
&= 16\pi \cdot \frac{4}{3} \qquad \text{(gemäss Hinweisen)}, \\
u(0) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S_2^2(0))} \int_{S_2^2(0)} u\,dA \qquad \text{(Mittelwertprinzip für eine harmonische Funktion)} \\
&= \frac{1}{4\pi \cdot 2^2} \cdot 16 \cdot \frac{4\pi}{3} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

2.MC6 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(A) $\max u = 2$ und $\min u = 0$

(B) $\max u = 4$ und $\min u = 0$

(C) $\max u = 2$ und $\min u = -2$

(D) $\max u = 4$ und $\min u = -2$

Lösung:

(B)

Begründung: Das folgt aus dem Maximumprinzip und dem Minimumprinzip für harmonische Abbildungen.

2.MC7 [2 Punkte] (greensche Funktion) Wir schreiben $\Phi := \Phi_2$ für die Fundamentallösung der Laplacegleichung auf $\mathbb{R}^2$, $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für die Drehung um den Winkel φ (im Bogenmass) im Gegenuhrzeigersinn und

$$\widetilde{x} := (x_1, -x_2), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Welche der folgenden Funktionen[2] ist eine greensche Funktion für das Gebiet

$$U := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 > x_1 \right\}?$$

(A) $G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi\Big(y - R_{\frac{\pi}{4}} \widetilde{R_{-\frac{\pi}{4}} x}\Big)$

[2] Die Funktionen sind auf $\left\{ (x,y) \in U \times \overline{U} \,\middle|\, x \neq y \right\}$ definiert.

(B) $G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi\Big(y - R_{\frac{\pi}{2}}\widetilde{R_{-\frac{\pi}{2}}x}\Big)$

(C) $G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi\Big(y - R_{-\frac{\pi}{4}}\widetilde{R_{\frac{\pi}{4}}x}\Big)$

(D) $G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi\Big(y - R_{-\frac{\pi}{2}}\widetilde{R_{\frac{\pi}{2}}x}\Big)$

Lösung:

(A)

Begründung dafür, dass (A) eine greensche Funktion für U ist: Das folgt aus einer Aufgabe in Übungsserie 12 (Greensche Funktion für allgemeinen Halbraum). Darin wird ein Satz aus der Vorlesung verwendet, der besagt, dass $G_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \Phi_n(y-x) - \Phi_n(y-\widetilde{x})$ eine greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ ist.

2.MC8 [3 Punkte] ("kritische Punkte" eines Funktionals) Sei $X : \overline{B}^2_1(0) \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \Big\{u \in C^2\Big(\overline{B}^2_1(0), \mathbb{R}\Big) \,\Big|\, u = 0 \text{ auf } \partial B^2_1(0)\Big\},$$
$$S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad S(u) := \frac{1}{2}\int \Big\|\nabla u - X\Big\|^2.$$

Für welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen sind ihre Lösungen, die $u = 0$ auf $\partial B^2_1(0)$ erfüllen, genau die "kritischen Punkte" von S?

(A) $\Delta u = \nabla \cdot X$

(B) $\Delta u = (\nabla \cdot X)u$

(C) $\Delta u = \|X\|^2$

(D) $\Delta u = X \cdot \nabla u$

Lösung:

(A)

Begründung: Wir definieren die Lagrangefunktion

$$L : B^2_1(0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad L(x,y,\xi) := \frac{1}{2}\|\xi - X(x)\|^2.$$

Das zugehörige Wirkungsfunktional ist S. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung sind die "kritischen Punkte" von S daher genau die Lösungen $u \in \mathcal{A}$ der Euler-Lagrange-Gleichung für L. Es gilt

$$L_{\xi_i}(x,y,\xi) = \xi_i - X_i(x), \qquad L_y = 0.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für L ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i=1}^{2}\Big(L_{\xi_i}\Big(\bullet, u, \nabla u\Big)\Big)_{x_i} + L_y\Big(\bullet, u, \nabla u\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{2}(u_{x_i} - X_i)_{x_i} \\
&= -\Delta u + \nabla \cdot X.
\end{aligned}$$

Offene Fragen

Instruktionen für diesen Teil der Prüfung:

- Tragen Sie Ihre Antworten im Antwortheft in das Feld unter der entsprechenden Aufgabennummer ein (d.h. Ihre Antwort für Aufgabe 3 sollte in das Feld unter dem Titel „Aufgabe 3“ geschrieben werden)
- Schreiben Sie alle Rechenschritte auf.

Aufgabe 3

(Anfangswertproblem)

3.A1 [4 Punkte] Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= e^{3x}, \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie das Resultat.

Lösung:

Das vorgegebene Problem ist ein Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit $c = 2$, $u_0(x) := 0$, $v_0(x) := e^{3x}$. Nach der D'Alembertschen Formel ist die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy \\ &= 0 + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} e^{3y} dy \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\, e^{3y}\Big|_{y=x-2t}^{x+2t} \\ &= \frac{1}{12}\left(e^{3x+6t} - e^{3x-6t}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(Fouriertransformierte)

4.A1 [5 Punkte] Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 e^{-x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:

Wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-1-i\xi)x} dx \\ &= \lim_{b \to \infty} \frac{e^{(-1-i\xi)x}}{-1-i\xi}\bigg|_{x=0}^{b} \\ &= 0 - \frac{1}{-1-i\xi} \\ &= \frac{1}{1+i\xi}. \end{aligned}$$

Wir definieren $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) := x$. Wir haben $f = \mathrm{id}^2 g$ und daher

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \widehat{\mathrm{id}^2 g}(\xi) \\ &= i \widehat{\mathrm{id} g}\,'(\xi) \qquad \text{(gemäss einem Satz aus der Vorlesung)} \\ &= i^2 \widehat{g}\,''(\xi) \qquad \text{(gemäss einem Satz aus der Vorlesung)} \\ &= -\frac{d}{d\xi} \frac{-i}{(1+i\xi)^2} \\ &= \frac{2}{(1+i\xi)^3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(Anfangswertproblem)

5.A1 [8 Punkte] Wir definieren die Funktionen

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x > 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x. Berechnen Sie eine Lösung $u \in C^2\Big((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$ des Anfangswertproblems

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R},$$
$$u(t,y) \to v(x) \text{ für } (t,y) \to (0,x), \text{ für jede Stetigkeitsstelle } x \text{ von } v,$$

indem Sie u mittels der Funktion f ausdrücken.

Bemerkungen:

- Eine Stetigkeitsstelle von v ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}$, in dem v stetig ist.
- Sie brauchen die Funktion f nicht zu berechnen.

Lösung:

Das vorgegebene Problem ist ein Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ mit $a = 1$ (ohne räumlich periodische Bedingung). Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} v(y) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} (I_- + I_+), \end{aligned} \tag{11}$$

$$I_- := -\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy, \qquad I_+ := \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Mit Hilfe der Substitution $\frac{x-y}{2\sqrt{t}} = z$ erhalten wir $y = x - 2\sqrt{t}z$, $dy = -2\sqrt{t}dz$ und

$$\begin{aligned} I_- &= -\int_{\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} (-2\sqrt{t}) dz \\ &= -\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} 2\sqrt{t} dz. \end{aligned} \tag{12}$$

Mit Hilfe der Substitution $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = z$ erhalten wir $y = x + 2\sqrt{t}z$, $dy = 2\sqrt{t}dz$ und

$$I_+ = \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} 2\sqrt{t} dz.$$

Indem wir das mit (12,13) kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 6

(elektrischer Schwingkreis, Minimalstelle eines Funktionals)

6.A1 [3 Punkte] Wir betrachten einen elektrischen Schwingkreis, der aus einem Kondensator und einer Spule besteht, die parallelgeschaltet sind. Wir schreiben:

- $t :=$ Zeit
- $Q :=$ Ladung des Kondensators
- $C :=$ Kapazität des Kondensators
- $L :=$ Induktivität der Spule

Die Gleichung für den elektrischen LC-Schwingkreis lautet:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0 \tag{13}$$

Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, sodass $t_0 < t_1$, und $Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \Big\{ Q \in C^2\Big([t_0, t_1], \mathbb{R}\Big) \,\Big|\, Q(t_i) = Q_i, \ \forall i = 0, 1 \Big\}, \\ S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, &\qquad S(Q) := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{L}{2} \dot{Q}^2 - \frac{1}{2C} Q^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass jede Minimalstelle $Q \in \mathcal{A}$ von S die Gleichung (14) löst.

Bemerkung: Falls Sie ein Resultat (zum Beispiel einen Satz) aus der Vorlesung verwenden, erwähnen Sie das dann.

Lösung:

Sei $Q \in \mathcal{A}$ eine Minimalstelle von S. Wir definieren die *Lagrangefunktion*

$$\mathcal{L} : (t_0, t_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(t, Q, I) := \frac{L}{2} I^2 - \frac{1}{2C} Q^2.$$

Es gilt

$$\mathcal{L}_I(t, Q, I) = LI, \qquad \mathcal{L}_Q = -\frac{Q}{C}. \tag{14}$$

Das zu $\mathcal{L}, Q_0, Q_1$ gehörige Wirkungsfunktional ist durch S gegeben. Gemäss einem Korollar aus der Vorlesung erfüllt Q daher die Euler-Lagrange-Gleichung für $\mathcal{L}$. Diese Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\Big(\mathcal{L}_I\Big(\bullet, Q, \dot{Q}\Big) \Big)_t + \mathcal{L}_Q\Big(\bullet, Q, \dot{Q}\Big) \\ &= -\frac{d}{dt} L\dot{Q} - \frac{Q}{C} \qquad \text{(wegen (15))} \\ &= -L\ddot{Q} - \frac{1}{C} Q, \\ \text{d. h.} &\qquad \ddot{Q} + \frac{1}{CL} Q = 0. \end{aligned}$$

Das stimmt mit der Gleichung (14) überein. Also erfüllt Q die Gleichung (14).

Aufgabe 7

(Greensche Funktion)

7.A1 [7 Punkte] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet. Wir definieren

$$C_c^2(U,\mathbb{R}) := \Big\{\varphi \in C^2(U,\mathbb{R}) \,\Big|\, \exists \text{ kompakte Teilmenge } K \subseteq U : \varphi = 0 \text{ auf } U \setminus K\Big\}.$$

Eine *greensche Funktion* für U ist eine Funktion

$$G : \Big\{(x,y) \in U \times \overline{U} \,\Big|\, x \neq y\Big\} \to \mathbb{R},$$

sodass für jedes $x \in U$ die Funktion $G^x := G(x,\bullet) : \overline{U} \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ C^2 ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$-\int_U G^x(y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(x), \qquad \forall \varphi \in C_c^2(U,\mathbb{R}), \tag{15}$$

$$G^x = 0 \qquad \text{auf } \partial U. \tag{16}$$

Wir schreiben $\Phi := \Phi_3$ für die Fundamentallösung der Laplacegleichung für $n = 3$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\widetilde{x} := \big(x_1, x_2, -x_3\big). \tag{17}$$

Wir definieren $\mathbb{R}^3_+ := \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ und die Funktion

$$G : \mathbb{R}^3_+ \times \overline{\mathbb{R}}^3_+ \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\widetilde{x}). \tag{18}$$

Zeigen Sie, dass G eine greensche Funktion für $\mathbb{R}^3_+$ ist.

Hinweise für (16):

- Zeigen Sie, dass
$$-\int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(x).$$
Verwenden Sie dazu Substitution, Ableiten unter dem Integral und einen Satz aus der Vorlesung. (Sie brauchen den Satz nicht zu beweisen.)
- Wählen Sie ein beschränktes C^1-Gebiet V, sodass
$$\overline{V} \subseteq \mathbb{R}^3_+, \tag{19}$$
$$\varphi = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^3_+ \setminus V. \tag{20}$$
Schreiben Sie den Ausdruck $\int_V \Phi(y-\widetilde{x})\Delta\varphi(y)\,dy$ mittels eines Resultates aus der Vorlesung (Satz, Hilfssatz usw.) um. (Sie brauchen das Resultat nicht zu beweisen.)
- Verwenden Sie (21).

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}^3_+$. Wir zeigen (16) mit $U := \mathbb{R}^3_+$. Sei $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{R})$. **Behauptung:**

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy = -\varphi(x). \tag{21}$$

Beweis der Behauptung: Wir schreiben

$$\Delta_x := \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(z)(\Delta\varphi)(x-z)\,dz \qquad (\text{Substitution } x-y=z)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(z)\Delta_x\Big(\varphi(x-z)\Big)\,dz\\
&= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(z)\varphi(x-z)\,dz \qquad (\text{Ableiten unter dem Integral})\\
&= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(x-y)\varphi(y)\,dy \qquad (\text{Substitution } x-z=y)\\
&= -\varphi(x) \quad (\text{gemäss dem Satz } \textit{Lösung der Poissongleichung auf } \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung (22).

Behauptung:

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(y-\widetilde{x})\Delta\varphi(y)\,dy = 0. \tag{22}$$

Beweis der Behauptung: Da $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{R})$, gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3_+$, sodass $\varphi = 0$ auf $\mathbb{R}^3_+ \setminus K$. Da K kompakt und $\mathbb{R}^3_+$ offen ist, gibt es ein beschränktes C^1-Gebiet V, sodass $K \subseteq V$ und $\overline{V} \subseteq \mathbb{R}^3_+$. (Wir können V zum Beispiel als einen Ball wählen.) Die Bedingungen (21,20) sind erfüllt.

Wir bezeichnen mit ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf ∂V und schreiben

$$\partial_\nu \varphi := D\varphi\,\nu = \nabla\varphi \cdot \nu.$$

Aus (18) folgt, dass $\widetilde{x} \notin \mathbb{R}^3_+$. Wegen (20) gilt daher $\widetilde{x} \notin V$. Gemäss einer Aufgabe aus Übungsserie 8 (Fundamentallösung der Laplacegleichung) gilt daher

$$\Delta\Phi(y-\widetilde{x}) = 0,\ \forall y \in V. \tag{23}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3_+} \Phi(y - \widetilde{x}) \Delta\varphi(y)\, dy \\
&= \int_V \Phi(y - \widetilde{x}) \Delta\varphi(y)\, dy \qquad \text{(wegen (21))} \\
&= \int_V \Delta\Phi(y - \widetilde{x}) \varphi(y)\, dy + \int_{\partial V} \Phi(y - \widetilde{x}) \partial_\nu \varphi(y)\, dy - \int_{\partial V} \partial_\nu \Phi(y - \widetilde{x}) \varphi(y)\, dy \\
&\quad \text{(gemäss der zweiten greenschen Identität)} \\
&= \int_V \Delta\Phi(y - \widetilde{x}) \varphi(y)\, dy \qquad \text{(wegen (21))} \\
&= 0 \qquad \text{(gemäss (24))}.
\end{aligned}
$$

Das zeigt die Behauptung (23). Aus (19,22,23) folgt, dass

$$
-\int_U G^x(y) \Delta\varphi(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^3_+} \Big(\Phi(y - x) - \Phi(y - \widetilde{x}) \Big) \Delta\varphi(y)\, dy = \varphi(x).
$$

Somit erfüllt G die Bedingung (16).

Sei $x \in \mathbb{R}^3_+$. Wir zeigen (17). Sei $y \in \partial\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Es gilt, dass

$$
\|y - x\| = \|y - \widetilde{x}\|, \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\| \bullet \|}.
$$

Daraus folgt, dass

$$
G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \widetilde{x}) = 0.
$$

Somit erfüllt G die Bedingung (17).