D–ITET, D-INFK, D-MATH (RW)

Probeprüfung Analysis 3

401-0353-00L

Nachname
XX

Vorname
XX

Legi-Nr.
XX-000-000

Prüfungs-Nr.
000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

1. Boxaufgaben

Instruktionen für diesen Teil der Prüfung:

- Tragen Sie Ihre Lösung zu jeder Aufgabe in die untere Tabelle ein.
- Tragen Sie jeweils **nur das Endresultat** ein. Nur dieses wird bewertet. Sie brauchen nichts zu begründen.
- **Text ausserhalb der Tabelle wird bei der Korrektur nicht berücksichtigt.**

Frage	Antwort	Punktzahl
1	(i) (ii) (iii)	
2	(i) (ii)	
3	(i) (ii)	
4		
5		
6		

1.A1 [2 Punkte] (Eigenschaften einer PDG) Wir betrachten die PDG (partielle Differentialgleichung)

$$y - xu_{yy}(x,y) + e^y u_{xxy}(x,y) = 0.$$

(i) Geben Sie die Ordnung der PDG an.

(ii) Geben Sie an, ob die PDG linear ist.

(iii) Falls die PDG linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.

1.A2 [2 Punkte] (Typ einer PDG) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x_1, x_2. (Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ als (x_1, x_2). Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.) Wir betrachten die folgende PDG für eine Funktion u auf $\mathbb{R}^2$:

$$u_{x_2x_2} - \cos(x_2)u_{x_1} = x_1^2 - 3u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2}.$$

(i) Ist diese PDG elliptisch?

(ii) Ist sie hyperbolisch?

1.A3 [2 Punkte] (Anfangswertproblem, Abhängigkeitsgebiet) Wir betrachten die Lösung $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= 4u_{xx}(t,x), && \text{für alle } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= 0, && \text{für alle } x \leq 0, \\ u_t(0,x) &= e^{(x^2)} - x^2 - 1, && \text{für alle } x > 0. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie das Abhängigkeitsgebiet von $(t,x) := (1,-3)$.

(ii) Bestimmen Sie $u\Big(t = 1, x = -3\Big)$.

1.A4 [2 Punkte] (zwei Integrale) Wir definieren die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4} \sin(x) e^{-iyx} dx.$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

1.A5 [2 Punkte] (Fouriertransformierte) Wir betrachten eine stückweise stetige, absolut integrierbare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := u(x-1).$$

Drücken Sie die Fouriertransformierte von v mittels der Fouriertransformierten von u aus.

1.A6 [3 Punkte] (asymptotisches Verhalten einer Lösung) Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Zickzackfunktion, d. h. die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$[-\pi, \pi) \ni x \mapsto |x|.$$

Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die Lösung $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= v(x), && \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\Big(t, x + 2\pi\Big) &= u(t,x), && \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Konvergiert $u(t,0)$ für $t \to \infty$ gegen eine reelle Zahl? Falls ja, gegen welche?

2. Multiple-Choice-Aufgaben

2.MC1 [2 Punkte] (iteriertes Integral) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetige absolut integrierbare Funktionen, sodass f beschränkt ist. Wodurch ist das folgende iterierte Integral gegeben?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \, dy \right) e^{-i\xi x} dx$$

(A) $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \right)$

(B) $\widehat{fg}(\xi)$

(C) $(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$, wobei $*$ die Faltung zweier Funktionen bezeichnet

(D) durch keinen der obigen Ausdrücke

2.MC2 [3 Punkte] (Anfangswertproblem für partielle Differentialgleichung) Wir definieren die Funktion

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben t, x für die Standardkoordinaten in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Sei $u \in C^2\Big((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u(t,y) &\to v(x) \text{ für } (t,y) \to (0,x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir nehmen auch an, dass

$$|u(t,x)| \leq e^{x^2}, \qquad \forall t \in (0,\infty),\ x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(2-y)^2}{4}} dy < \sqrt{\pi}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(A) $u(1,2) = 0$

(B) $0 < u(1,2) < \frac{1}{2}$

(C) $u(1,2) = \frac{1}{2}$

(D) $u(1,2) > \frac{1}{2}$

2.MC3 [2 Punkte] (elektrostatisches Potential, Poissongleichung) Die vier Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und das Magnetfeld $\mathbf{B}$ sind gegeben durch:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{4}$$

(i) Wir nehmen an, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zeitlich konstant sind, d. h. nicht von t abhängen. Wir können $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ also als zeitunabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. als Abbildungen $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Aus welcher der vier Maxwell-Gleichungen folgt, dass $\mathbf{E}$ ein Potential besitzt?

(ii) Aus welcher der vier Maxwellgleichungen folgt, dass dieses Potential die Poissongleichung erfüllt?

2.MC4 [4 Punkte] (partielle Differentialgleichung auf der Kreisscheibe) Sei $u \in C^2(\overline{B}_1^2(0), \mathbb{R})$ eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{auf } B_1^2(0), \\ u(x,y) &= x^3 && \text{auf } \partial B_1^2(0). \end{aligned}$$

(i) **Hinweis:** Es gilt

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^3 = -\int_0^\pi \cos^3 .$$

$u(0,0)$ ist gegeben durch

(A) 0
(B) 1
(C) -1
(D) keine der obigen drei Zahlen

(ii) Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(A) $\max u = 1$ und $\min u = -1$
(B) $\max u = 8$ und $\min u = -8$
(C) $\max u = \sqrt[3]{2}$ und $\min u = -\sqrt[3]{2}$
(D) Die obigen drei Aussagen sind falsch.

2.MC5 [2 Punkte] (Invarianz des Laplace-Operators) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede Abbildung $\Phi \in C^2\Big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\Big)$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(B) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jeden C^2-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Es gibt eine Abbildung $\Phi \in C^2\Big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\Big)$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

(C) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede euklidische Transformation[1] $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Es gibt einen C^2-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

(D) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede Drehung von $\mathbb{R}^2$. Es gibt eine euklidische Transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

[1] Das bedeutet, dass Φ den euklidischen Abstand erhält.

2.MC6 [3 Punkte] ("kritische Punkte" des Wirkungsfunktionals) Sei $g : \partial B_1^2(0) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \left\{ u \in C^2\left(\overline{B}_1^2(0), \mathbb{R}\right) \,\middle|\, u = g \text{ auf } \partial B_1^2(0) \right\}.$$

Für welche der folgenden Funktionen L sind die "kritischen Punkte" des zugehörigen Wirkungsfunktionals S_L gerade die Lösungen des folgenden Randwertproblems?

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u && \text{auf } B_1^2(0) \\ u &= g && \text{auf } \partial B_1^2(0) \end{aligned}$$

(A) $L(x, y, \xi) := \|\xi\|^2 - y$

(B) $L(x, y, \xi) := \dfrac{1}{2}\|\xi\|^2 - y$

(C) $L(x, y, \xi) := \|\xi\|^2 - \dfrac{y^2}{2}$

(D) $L(x, y, \xi) := \dfrac{1}{2}\|\xi\|^2 - \dfrac{y^2}{2}$

Offene Fragen

Instruktion für diesen Teil der Prüfung:

- Schreiben Sie alle Rechnungsschritte auf.

Aufgabe 3

(Fourierkoeffizienten, Anfangswertproblem mit periodischer Bedingung)

Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\widetilde{v} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{v}(x) := (x - \pi)^2.$$

3.A1 [**9 Punkte**] Berechnen Sie die (komplexen) Fourierkoeffizienten von v.

Vereinfachen Sie das Resultat.

3.A2 [**3 Punkte**] Bestimmen Sie eine stetige Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ die PDG

$$u_t = u_{xx}$$

löst, die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = v(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

erfüllt und räumlich 2π-periodisch ist. Formulieren Sie Ihre endgültige Lösung als die Summe einer konstanten Funktion und von Funktionen der Form $f(t, x) = g(t) \cos(kx)$ oder $f(t, x) = g(t) \sin(kx)$. (Es kann sein, dass nur gewisse dieser Funktionen vorkommen.)

Bemerkung: Falls Sie die erste Teilaufgabe nicht lösen konnten, dann dürfen Sie hier annehmen, dass $\widehat{v}_0 = \frac{\pi^3}{2}$ und $\widehat{v}_k = \frac{k^4}{2}$, für $k \neq 0$. Sagen Sie in diesem Fall, dass Sie diese Annahme machen. (Das ist nicht die richtige Lösung zur ersten Teilaufgabe.)

Aufgabe 4

(Anfangswertproblem)

4.A1 [**4 Punkte**] Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x. Berechnen Sie die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, \qquad \forall x\in\mathbb{R} \\ u_t(0,x) &= e^{2x}, \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(Anfangswertproblem)

5.A1 [5 Punkte] Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= e^{-x}, \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie dürfen ohne Herleitung verwenden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 6

(Inhomogene PDG)

6.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie eine Lösung w des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) &= e^{-x} \\ w(0,x) &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie dürfen Aufgabe 5 verwenden. Falls Sie Aufgabe 5 nicht lösen konnten, dann dürfen Sie annehmen, dass eine Lösung zu jener Aufgabe durch $u(t,x) = e^{t+x}$ gegeben ist. (Das ist keine richtige Lösung.)

Aufgabe 7

(Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung)

7.A1 [3 Punkte] Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe

$$B^2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

und zwei stetige Funktionen

$$f : B^2 \to \mathbb{R}, \qquad g : \partial B^2 \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung

$$\begin{aligned} \Delta u = f \qquad & \text{auf } B^2, \\ u(x,y) \to g(x_0, y_0) \quad & \text{für } (x,y) \to (x_0, y_0), \qquad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2, \end{aligned}$$

eindeutig ist, d. h., falls u_0, u_1 Lösungen dieses Problems sind, dann gilt $u_0 = u_1$.

Bemerkung: Diese Aussage war ein Korollar in der Vorlesung. Die Aufgabe ist es, dieses Korollar zu beweisen. Sie dürfen dazu Sätze aus der Vorlesung anwenden, ohne diese zu beweisen.