Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Boxaufgaben

Instruktionen für diesen Teil der Prüfung:

- Tragen Sie Ihre Lösung zu jeder Aufgabe in die untere Tabelle ein.
- Tragen Sie jeweils **nur das Endresultat** ein. Nur dieses wird bewertet. Sie brauchen nichts zu begründen.
- **Text ausserhalb der Tabelle wird bei der Korrektur nicht berücksichtigt.**

Frage	Antwort	Punktzahl
1	(i) (ii) (iii)	
2	(i) (ii)	
3	(i) (ii)	
4		
5		
6		

1.A1 [2 Punkte] (Eigenschaften einer PDG) Wir betrachten die PDG (partielle Differentialgleichung)

$$y - xu_{yy}(x,y) + e^y u_{xxy}(x,y) = 0.$$

(i) Geben Sie die Ordnung der PDG an.

(ii) Geben Sie an, ob die PDG linear ist.

(iii) Falls die PDG linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.

Lösung:

(i) Die Ordnung der PDG ist 3.

(ii) Die PDG ist linear.

(iii) Die PDG ist inhomogen.

1.A2 [2 Punkte] (Typ einer PDG) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x_1, x_2. (Wir schreiben also einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ als (x_1, x_2). Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.) Wir betrachten die folgende PDG für eine Funktion u auf $\mathbb{R}^2$:

$$u_{x_2x_2} - \cos(x_2)u_{x_1} = x_1^2 - 3u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2}.$$

(i) Ist diese PDG elliptisch?

(ii) Ist sie hyperbolisch?

Lösung:

(i) Die PDG ist elliptisch.

(ii) Sie ist nicht hyperbolisch.

In der Aufgabenstellung wurde keine Begründung verlangt. Die nachfolgende Begründung ist als Unterstützung zur Prüfungsvorbereitung gedacht.

Begründung: Indem wir Terme auf die linke Seite bringen, können wir die PDG in der folgenden Form schreiben:

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu = f,$$

wobei $a_{11} \equiv 3,\ a_{12} \equiv 1,\ a_{22} \equiv 1,\ b_1(x_1, x_2) := -\cos(x_2),\ b_2 \equiv 0,\ c \equiv 0,\ f(x_1, x_2) := x_1^2.$

Die Diskriminante der PDG ist gegeben durch

$$D := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2 > 0. \tag{1}$$

Da D positiv ist, ist die PDG gemäss einer Proposition aus der Vorlesung elliptisch und nicht hyperbolisch.

1.A3 [2 Punkte] (Anfangswertproblem, Abhängigkeitsgebiet) Wir betrachten die Lösung $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t, x) &= 4u_{xx}(t, x), && \text{für alle } t > 0,\ x \in \mathbb{R},\\
u(0, x) &= 0, && \text{für alle } x \in \mathbb{R},\\
u_t(0, x) &= 0, && \text{für alle } x \leq 0,\\
u_t(0, x) &= e^{(x^2)} - x^2 - 1, && \text{für alle } x > 0.
\end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie das Abhängigkeitsgebiet von $(t, x) := (1, -3)$.

(ii) Bestimmen Sie $u\Big(t = 1, x = -3\Big)$.

Lösung:

(i) $\Big[x - ct, x + ct\Big] = [-5, -1]$.

(ii) $u\Big(t = 1, x = -3\Big) = 0$

Begründungen:

(i) Es handelt sich bei diesem Problem um ein Anfangswertproblem für die räumlich 1-dimensionale Wellengleichung mit

$$c = 2, \qquad u_0 \equiv 0, \qquad v_0(x) := \begin{cases} 0, & \text{für alle } x \leq 0, \\ e^{(x^2)} - x^2 - 1, & \text{für alle } x > 0. \end{cases}$$

Das Abhängigkeitsgebiet für ein solches Problem ist $\Big[x - ct, x + ct\Big]$.

(ii) Im Abhängigkeitsgebiet sind u_0 und v_0 gleich 0.

Alternative ausführlichere Berechnung: Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist die Lösung dieses Problems durch die d'Alembertsche Formel gegeben:

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy \\ &= 0 + 0 \quad \text{für } (t,x) = (1,-3), \text{ da dann } \Big[x - ct, x + ct\Big] \text{ in } (-\infty, 0] \text{ enthalten ist.} \end{aligned}$$

1.A4 [2 Punkte] (zwei Integrale) Wir definieren die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}\sin(x)e^{-iyx}dx.$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy.$$

Lösung:

$f(x) = 2\pi e^{-x^4}\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Begründung: Wir definieren

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := e^{-x^4}\sin(x).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} g &= \widehat{h}, \\ f &= 2\pi\check{g} \\ &= 2\pi\check{\widehat{h}} \\ &= 2\pi h, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt einen Satz aus der Vorlesung über die Fourierrücktransformation angewendet haben. Es gilt also

$$f(x) = 2\pi h(x) = 2\pi e^{-x^4}\sin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.A5 [2 Punkte] (Fouriertransformierte) Wir betrachten eine stückweise stetige, absolut integrierbare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := u(x-1).$$

Drücken Sie die Fouriertransformierte von v mittels der Fouriertransformierten von u aus.

Lösung:

$\widehat{v}(\xi) = e^{-i\xi}\widehat{u}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

Begründung: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x-1)e^{-i\xi x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y)e^{-i\xi(y+1)}dy \qquad \text{(mittels der Substitution } y = x-1\text{)} \\ &= e^{-i\xi}\widehat{u}(\xi).\end{aligned}$$

1.A6 [3 Punkte] (asymptotisches Verhalten einer Lösung) Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Zickzackfunktion, d. h. die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$[-\pi, \pi) \ni x \mapsto |x|.$$

Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die Lösung $u : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= v(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\Big(t, x+2\pi\Big) &= u(t,x), \qquad \forall t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Konvergiert $u(t,0)$ für $t \to \infty$ gegen eine reelle Zahl? Falls ja, gegen welche?

Lösung:

ja, gegen $\frac{\pi}{2}$

Begründung: Gemäss einem Satz in der Vorlesung ist u gegeben durch

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty,\ldots,\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2t+ikx}.$$

Analog zu einem Argument in der Vorlesung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t_0, sodass für jedes

$t \geq t_0$ gilt

$$\left| \sum_{0 \neq k = -\infty, \dots, \infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \right| \leq \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t,x) \to \widehat{v}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2. Multiple-Choice-Aufgaben

2.MC1 [2 Punkte] (iteriertes Integral) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetige absolut integrierbare Funktionen, sodass f beschränkt ist. Wodurch ist das folgende iterierte Integral gegeben?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy \right) e^{-i\xi x} dx$$

(A) $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \right)$

(B) $\widehat{fg}(\xi)$

(C) $(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$, wobei $*$ die Faltung zweier Funktionen bezeichnet

(D) durch keinen der obigen Ausdrücke

Lösung:

(A)

Begründung:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy \right) e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \widehat{f * g}(\xi) \\
&= (\widehat{f}\widehat{g})(\xi) \qquad \text{(Satz aus der Vorlesung, Faltung und Fouriertransformation)} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} \right)
\end{aligned}$$

2.MC2 [3 Punkte] (Anfangswertproblem für partielle Differentialgleichung) Wir definieren die Funktion

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben t, x für die Standardkoordinaten in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$. Sei $u \in C^2\big((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u(t,y) &\to v(x) \text{ für } (t,y) \to (0,x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir nehmen auch an, dass

$$|u(t,x)| \leq e^{x^2}, \qquad \forall t \in (0,\infty),\ x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(2-y)^2}{4}} dy < \sqrt{\pi}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(A) $u(1,2) = 0$

(B) $0 < u(1,2) < \frac{1}{2}$

(C) $u(1,2) = \frac{1}{2}$

(D) $u(1,2) > \frac{1}{2}$

Lösung:

(B)

Begründung: Wir definieren den Wärmeleitungskern als die Funktion

$$K : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad K(t,x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$, Eindeutigkeit der Lösung) gilt

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,x-y)v(y)\,dy, \qquad \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Für $(t,x) = (1,2)$ erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned} u(1,2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2-y)^2}{4}} v(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(2-y)^2}{4}} v(y)\,dy \qquad (\text{da } v(y) = 0, \text{ falls } |y| > 1) \qquad (2) \\ &> 0, \end{aligned}$$

da $v \geq 0$ und $v(0) = 1 > 0$. Aus (2), dem Hinweis und der Tatsache $v \leq 1$ folgt, dass $u(1,2) < \frac{1}{2}$. Daher gilt (B).

2.MC3 [2 Punkte] (elektrostatisches Potential, Poissongleichung) Die vier Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und das Magnetfeld $\mathbf{B}$ sind gegeben durch:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \qquad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad (6)$$

(i) Wir nehmen an, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zeitlich konstant sind, d. h. nicht von t abhängen. Wir können $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ also als zeitunabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. als Abbildungen $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Aus welcher der vier Maxwell-Gleichungen folgt, dass $\mathbf{E}$ ein Potential besitzt?

Lösung:

(5)

Begründung: Da wir annehmen, dass $\mathbf{B}$ zeitlich konstant ist, gilt $\partial_t \mathbf{B} = 0$. Mittels (5) folgt daraus, dass $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\mathbf{E}$ gemäss einem Satz aus Analysis 2 daher konservativ, d. h. $\mathbf{E}$ besitzt ein Potential, d. h. eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. (Wir verwenden hier die in der Physik gebräuchliche Vorzeichenkonvention.)

(ii) Aus welcher der vier Maxwellgleichungen folgt, dass dieses Potential die Poissongleichung erfüllt?

Lösung:

(3)

Begründung: Da $\nabla\phi = -\mathbf{E}$, folgt aus (3), dass

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

2.MC4 [4 Punkte] (partielle Differentialgleichung auf der Kreisscheibe) Sei $u \in C^2(\overline{B}_1^2(0), \mathbb{R})$ eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{auf } B_1^2(0), \\ u(x,y) &= x^3 && \text{auf } \partial B_1^2(0). \end{aligned}$$

(i) **Hinweis:** Es gilt

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^3 = -\int_0^\pi \cos^3 .$$

$u(0,0)$ ist gegeben durch

(A) 0
(B) 1
(C) -1
(D) keine der obigen drei Zahlen

Lösung:

(A)

Für eine **Begründung** siehe Übungsserie 9 (Laplacegleichung auf der Kreisscheibe, Poisson-Formel, Maximum- und Minimumprinzip).

(ii) Welche der folgenden Aussagen stimmt?

(A) $\max u = 1$ und $\min u = -1$
(B) $\max u = 8$ und $\min u = -8$

(C) $\max u = \sqrt[3]{2}$ und $\min u = -\sqrt[3]{2}$

(D) Die obigen drei Aussagen sind falsch.

Lösung:

(A)

Für eine **Begründung** siehe Übungsserie 9 (Laplacegleichung auf der Kreisscheibe, Poisson-Formel, Maximum- und Minimumprinzip).

2.MC5 [2 Punkte] (Invarianz des Laplace-Operators) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede Abbildung $\Phi \in C^2\Big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\Big)$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(B) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jeden C^2-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Es gibt eine Abbildung $\Phi \in C^2\Big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\Big)$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

(C) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede euklidische Transformation[1] $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Es gibt einen C^2-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

(D) Es gilt $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ für jede Drehung von $\mathbb{R}^2$. Es gibt eine euklidische Transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, sodass $\Delta(f \circ \Phi) \neq (\Delta f) \circ \Phi$.

Lösung:

(C)

Für eine **Begründung** siehe Übungsserie 12 (Invarianz des Gradienten und des Laplace-Operators unter euklidischer Transformation, Invarianz der Divergenz unter bijektiver affiner Transformation).

2.MC6 [3 Punkte] ("kritische Punkte" des Wirkungsfunktionals) Sei $g : \partial B_1^2(0) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \Big\{ u \in C^2\Big(\overline{B}_1^2(0), \mathbb{R}\Big) \,\Big|\, u = g \text{ auf } \partial B_1^2(0) \Big\}.$$

Für welche der folgenden Funktionen L sind die "kritischen Punkte" des zugehörigen Wirkungsfunktionals S_L gerade die Lösungen des folgenden Randwertproblems?

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u \qquad \text{auf } B_1^2(0) \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial B_1^2(0) \end{aligned}$$

[1] Das bedeutet, dass Φ den euklidischen Abstand erhält.

(A) $L(x, y, \xi) := \|\xi\|^2 - y$

(B) $L(x, y, \xi) := \frac{1}{2}\|\xi\|^2 - y$

(C) $L(x, y, \xi) := \|\xi\|^2 - \frac{y^2}{2}$

(D) $L(x, y, \xi) := \frac{1}{2}\|\xi\|^2 - \frac{y^2}{2}$

Lösung:

(D)

Für eine **Begründung** siehe Übungsserie 13 (Variante der Poisson-Gleichung).

Offene Fragen

Instruktion für diesen Teil der Prüfung:

- Schreiben Sie alle Rechnungsschritte auf.

Aufgabe 3

(Fourierkoeffizienten, Anfangswertproblem mit periodischer Bedingung)

Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\widetilde{v} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{v}(x) := (x - \pi)^2.$$

3.A1 [**9 Punkte**] Berechnen Sie die (komplexen) Fourierkoeffizienten von v.

Vereinfachen Sie das Resultat.

Lösung:

Für $k = 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-i \cdot 0 x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{(x-\pi)^3}{3} \right|_{x=0}^{2\pi} \\
&= \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{6\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_k =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x)e^{-ikx}dx\\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 e^{-ikx}dx\\
=& \frac{1}{2\pi(-ik)}\left((x-\pi)^2 e^{-ikx}\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \int_0^{2\pi} 2(x-\pi)e^{-ikx}dx\right)\\
& \text{(mittels partieller Integration)}\\
=& \frac{1}{2\pi(-ik)}\left(\pi^2 e^{-ik2\pi} - (-\pi)^2 e^{-ik\cdot 0} - \frac{1}{-ik}\left(2(x-\pi)e^{-ikx}\Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2e^{-ikx}dx\right)\right)\\
& \text{(mittels partieller Integration)}\\
&= 0 + \frac{2}{2\pi k^2}\left(\pi e^{-ik2\pi} - (-\pi)e^{-ik\cdot 0}\right) + 0\\
&= \frac{2}{k^2}.
\end{aligned}$$

3.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie eine stetige Funktion $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Gebiet $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ die PDG

$$u_t = u_{xx}$$

löst, die Anfangsbedingung

$$u(0,x) = v(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

erfüllt und räumlich 2π-periodisch ist. Formulieren Sie Ihre endgültige Lösung als die Summe einer konstanten Funktion und von Funktionen der Form $f(t,x) = g(t)\cos(kx)$ oder $f(t,x) = g(t)\sin(kx)$. (Es kann sein, dass nur gewisse dieser Funktionen vorkommen.)

Bemerkung: Falls Sie die erste Teilaufgabe nicht lösen konnten, dann dürfen Sie hier annehmen, dass $\widehat{v}_0 = \frac{\pi^3}{2}$ und $\widehat{v}_k = \frac{k^4}{2}$, für $k \neq 0$. Sagen Sie in diesem Fall, dass Sie diese Annahme machen. (Das ist nicht die richtige Lösung zur ersten Teilaufgabe.)

Lösung:

Das vorgegebene Problem ist ein Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit $a = 1$ und räumlich 2π-periodischer Bedingung. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist die Lösung dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(t,x) :=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2t+ikx}\\
&= \frac{\pi^2}{3}e^{-0^2t+i\cdot 0x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}e^{-k^2t}e^{ikx} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{2}{(-\ell)^2}e^{-(-\ell)^2t}e^{i(-\ell)x}\\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}e^{-k^2t}\cos(kx).
\end{aligned}$$

Formel für u auf der Grundlage der falschen Fourierkoeffizienten $\widehat{v}_0 = \frac{\pi^3}{2}$, $\widehat{v}_k = \frac{k^4}{2}$,

für $k \neq 0$**:**

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \\ &= \frac{\pi^3}{2} e^{-0^2 t + i \cdot 0x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2} e^{-k^2 t} e^{ikx} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-\ell)^4}{2} e^{-(-\ell)^2 t} e^{i(-\ell)x} \\ &= \frac{\pi^3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k^2 t} \cos(kx). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(Anfangswertproblem)

4.A1 [4 Punkte] Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x. Berechnen Sie die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) &= e^{2x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

Das vorgegebene Problem ist ein Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit $c = 3$, $u_0 \equiv 0$, $v_0(x) := e^{2x}$. Nach der D'Alembertschen Formel ist die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy \\ &= 0 + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} e^{2y} dy \\ &= \frac{e^{2y}}{6\cdot 2}\Bigg|_{y=x-3t}^{x+3t} \\ &= \frac{e^{2x+6t} - e^{2x-6t}}{12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(Anfangswertproblem)

5.A1 [5 Punkte] Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad \text{auf } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie dürfen ohne Herleitung verwenden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Lösung:

Das vorgegebene Problem ist ein Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ mit $a = 1$ und $v(x) := e^{-x}$ (ohne räumlich periodische Bedingung). Wir definieren den Wärmeleitungskern als die Funktion

$$K : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad K(t,x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,x-y)v(y)dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - y} dy. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir verwenden die Substitution

$$z := \frac{y-x+2t}{2\sqrt{t}}, \qquad y = 2\sqrt{t}z + x - 2t, \qquad dy = 2\sqrt{t}dz.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} -\frac{(x-y)^2}{4t} - y &= \frac{-\Big((y-x)^2 + 2(y-x)\cdot 2t + 4t^2\Big)}{4t} - x + t \\ &= -z^2 - x + t \\ \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - y} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-x+t} 2\sqrt{t} dz \\ &= 2\sqrt{\pi t} e^{-x+t}, \end{aligned}$$

wobei wir die Gleichheit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ verwendet haben. Indem wir das mit (7) kombinieren, erhalten wir

$$u(t,x) = e^{-x+t}.$$

Aufgabe 6

(Inhomogene PDG)

6.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie eine Lösung w des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) &= e^{-x} \\ w(0,x) &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sie dürfen Aufgabe 5 verwenden. Falls Sie Aufgabe 5 nicht lösen konnten, dann dürfen Sie annehmen, dass eine Lösung zu jener Aufgabe durch $u(t,x) = e^{t+x}$ gegeben ist. (Das ist keine richtige Lösung.)

Lösung:

Wir verwenden das Prinzip von Duhamel. Dazu suchen wir eine Funktion v der Variablen $s \geq 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $s \geq 0$ die Funktion $v(s,\bullet,\bullet)$ die (homogene) Wärmeleitungsgleichung

$$v_t(s,t,x) - v_{xx}(s,t,x) = 0$$

sowie die inhomogene Anfangsbedingung

$$v(s,t=s,x) = e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Aus der Lösung zu Aufgabe 5 folgt, dass die Funktion

$$v(s,t,x) := u(t-s,x) = e^{-x+t-s}$$

diese Bedingungen erfüllt. Wir definieren

$$\begin{aligned} w(t,x) &:= \int_0^t v(s,t,x)ds \\ &= \int_0^t e^{-x+t-s}ds \\ &= -\, e^{-x+t-s}\Big|_{s=0}^{t} \\ &= -e^{-x} + e^{-x+t}. \end{aligned}$$

Wegen des Prinzips von Duhamel löst diese Funktion das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) &= e^{-x} \\ w(0,x) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

(Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung)

7.A1 [3 Punkte] Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe

$$B^2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

und zwei stetige Funktionen

$$f : B^2 \to \mathbb{R}, \qquad g : \partial B^2 \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung

$$\begin{aligned} \Delta u = f \qquad &\text{auf } B^2, \\ u(x, y) \to g(x_0, y_0) \quad &\text{für } (x, y) \to (x_0, y_0), \qquad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2, \end{aligned}$$

eindeutig ist, d. h., falls u_0, u_1 Lösungen dieses Problems sind, dann gilt $u_0 = u_1$.

Bemerkung: Diese Aussage war ein Korollar in der Vorlesung. Die Aufgabe ist es, dieses Korollar zu beweisen. Sie dürfen dazu Sätze aus der Vorlesung anwenden, ohne diese zu beweisen.

Lösung:

Um die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung zu zeigen, verwenden wir das Maximumprinzip. Dieses Prinzip besagt, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum auf dem Rand ihres Definitionsbereichs annimmt. In unserem Fall ist der Definitionsbereich die Einheitskreisscheibe B^2, und der Rand ist der Einheitskreis ∂B^2.

Seien u_0 und u_1 Lösungen des Dirichlet-Randwertproblems

$$\Delta u = f \quad \text{in } B^2, \tag{8}$$

$$u(x, y) \to g(x_0, y_0) \quad \text{für } (x, y) \to (x_0, y_0), \qquad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2. \tag{9}$$

Wir betrachten einen Punkt $(x, y) \in B^2$. Wir zeigen, dass $u_0(x, y) = u_1(x, y)$. Dazu zeigen wir zuerst, dass $u_0(x, y) \leq u_1(x, y)$. Wir betrachten die Funktion $w := u_1 - u_0$. Indem wir (8) verwenden, erhalten wir

$$\Delta w = \Delta u_1 - \Delta u_0 = f - f = 0.$$

Aus (9) folgt, dass

$$w(x, y) = u_1(x, y) - u_0(x, y) \to g(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) = 0 \text{ für } (x, y) \to (x_0, y_0),\ \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2.$$

Die Funktion w ist also harmonisch und nimmt auf dem Rand den Wert 0 an. Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt daraus, dass $w \leq 0$. Aus dem Minimumprinzip folgt, dass $w \geq 0$. Also gilt $w = 0$, d. h.

$$u_0 = u_1,$$

wie behauptet.