

Notizen zur Vorlesung Analysis 3 (ITET und RW):
Partielle Differentialgleichungen, ETH Zürich,
Herbstsemester 2024

F. Ziltener

20. Dezember 2024

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
0 Ausblick auf die Vorlesung: Definition einer PDG, Beispiele	3
0.1 Einleitung, Maxwellgleichungen	3
0.2 Partielle und gewöhnliche Differentialgleichungen	5
0.3 Laplace-, Wellen-, Wärmeleitungsgleichung,	9
0.4 Ein paar allgemeine Bemerkungen	12
0.5 Konzentration einer diffundierenden chemischen Substanz, Diffusionsgleichung	12
1 Linearität einer PDG, Typen von PDG, Anfangs- und Randbedingungen, Trennung der Variablen	19
1.1 Linearität einer PDG, Superpositionsprinzip	19
1.2 Typen linearer PDG zweiter Ordnung (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch)	22
1.3 Anfangs- und Randbedingungen anhand der Beispiele der Wärmeleitungs- und Wellengleichungen	29
1.4 Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Anwendung auf Wärmeleitungsgleichung	31
2 Räumlich 1-dimensionale Wellengleichung, inhomogene lineare Evolutionsgleichungen	39
2.1 Herleitung der Wellengleichung für eine ebene Druckwelle in einem Kristallgitter	39
2.2 Allgemeine Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung	45
2.3 d'Alembertsche Formel für die Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung	48
2.4 Inhomogene lineare PDG, Prinzip von Duhamel	58
3 Fouriertheorie für periodische Funktionen	69
3.1 Periodische, stückweise stetige Funktionen, Fourierkoeffizienten	70
3.2 Fourierreihenentwicklung	78
3.3 Fourierreihen und partielle Differentialgleichungen, die Wärmeleitungsgleichung	93

4	Fouriertransformation	107
4.1	Fouriertransformation: Definition und Eigenschaften	110
4.2	Die Fourier-Rücktransformation	118
4.3	Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} und Fouriertransformation, lineare Differentialgleichungen	119
5	Laplace- und Poissongleichung	131
5.1	Die Poissonformel für die Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe	132
5.2	Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe mittels Fourierreihe	138
5.3	Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf einem Quadrat, unendliche Superposition	139
5.4	Mittelwertprinzip für harmonische Funktionen	142
5.5	Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen	146
5.6	Poissongleichung auf \mathbb{R}^n , Laplacegleichung auf einem Halbraum und auf einem Ball, greensche Funktion	149
5.7	Energiemethoden, Dirichletprinzip	164
6	Variationsrechnung, Prinzip der stationären Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung	169
6.1	Lagrange-Funktion, Wirkungsfunktional, Euler-Lagrange-Gleichung . .	170
6.2	Elektrodynamik, Maxwellgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen .	177
	Literaturverzeichnis	183

Vorwort

Im Herbstsemester 2024 halte ich an der ETH Zürich die Vorlesung *Analysis 3 (Partielle Differentialgleichungen)* für Studentinnen und Studenten der Studiengänge Informationstechnologie und Elektrotechnik und Rechnergestützte Wissenschaften. Diese Notizen ergänzen die folgende Literatur für dieses Fach:

Y. Pinchover, J. Rubinstein, *An introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

L. C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Books on Mathematics, NY.

Ich hoffe, dass Ihnen meine Notizen beim Verständnis des Stoffes helfen werden. Rückmeldungen sind willkommen! Bitte schicken Sie diese an fabian.ziltener@math.ethz.ch .

Fabian Ziltener, ETH Zürich

Kapitel 0

Ausblick auf die Vorlesung: Definition einer PDG, Beispiele

0.1 Einleitung, Maxwellgleichungen

Bemerkung. In dieser ersten Vorlesungsstunde möchte ich Ihnen einen Ausblick auf die Vorlesung geben. **Ich erwarte nicht, dass Sie alles gleich vollständig verstehen werden. Wir werden die Details in späteren Vorlesungsstunden ausarbeiten.**

Grob gesagt, ist eine *partielle Differentialgleichung (PDG)* eine Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der die Funktion und ihre partiellen Ableitungen (auch höherer Ordnung) auftreten. Solche Gleichungen beschreiben zahlreiche physikalische und chemische Gesetze. Dabei spielt die gesuchte Funktion die Rolle einer physikalischen oder chemischen Grösse, die vom Ort und manchmal von der Zeit abhängt.

Ein Beispiel aus der Physik ist die **Wellengleichung**, die unter anderem die Ausbreitung von Schallwellen und elektromagnetischen Wellen beschreibt. (Siehe die Vorlesungen *Physik I* (ITET, RW) und *Elektromagnetische Felder und Wellen* (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester). Ein weiteres Beispiel ist die **Diffusionsgleichung**, die beschreibt, wie sich die räumliche Verteilung einer Stoffmengenkonzentrationen zeitlich entwickelt. Die **Schrödingergleichung** beschreibt die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems. (Siehe die Vorlesung *Physics II* (ITET).)

Die **Maxwell-Gleichungen** sind ein *System* von partiellen Differentialgleichungen, welche die Zeitentwicklung des elektrischen und des magnetischen Feldes beschreiben.

Sie sind gegeben durch (in SI-Einheiten):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gaußsches Gesetz für das elektrische Feld} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gaußsches Gesetz für das magnetische Feld} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Ampèresches Gesetz mit Maxwell'schem Verschiebungsstrom} \quad (4)$$

$t :=$ Zeit

$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$

$x = (x_1, x_2, x_3) :=$ Ort

$\nabla := \nabla_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$ räumlicher Gradient

$\mathbf{E} :=$ elektrische Feldstärke (gesuchte Funktion von t und x)

$\mathbf{B} :=$ Magnetfeld (gesuchte Funktion von t und x)

$\rho :=$ Ladungsdichte

$\mathbf{j} :=$ elektrische Stromdichte

$\varepsilon_0 :=$ elektrische Feldkonstante $\approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

$\mu_0 :=$ magnetische Feldkonstante $\approx 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$

(Siehe die Vorlesungen *Physik II* (RW) und *Elektromagnetische Felder und Wellen* (ITET: 4. Semester, RW: Wahlfach, 6. Semester).) Die Maxwell-Gleichungen sind nach James Clerk Maxwell benannt, siehe Abbildung 0.1.

Bemerkungen. [Maxwellgleichungen]

- Die Maxwellgleichungen beschreiben zusammen mit dem Lorentzkraftgesetz die klassische Elektrodynamik, d. h., die Zeitentwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes sowie die Bewegung der Ladungen.
- Im Vakuum folgt aus den Maxwell-Gleichungen die *Wellengleichung*¹. (Siehe Übungsserie 1.)

¹siehe Abschnitt 0.3



Abbildung 0.1: James Clerk Maxwell, 1831–1879, schottischer Physiker.

Ein Ziel der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es, eine gegebene Differentialgleichung zu lösen. Im besten Fall wird die Lösung durch eine Formel gegeben. Ein Ziel dieser Vorlesung ist es, solche Formeln für die Wellengleichung, die Diffusionsgleichung und die Laplace-Gleichung (siehe Abschnitt 0.3) zu behandeln. Ein weiteres Ziel ist es, Eigenschaften der Lösungen einer gegebenen PDG zu beschreiben. Zum Beispiel konvergiert die Lösung der Diffusionsgleichung bei isolierenden Randbedingungen gegen den Mittelwert der Anfangsbedingung, wenn die Zeit gegen unendlich geht. (Die Lösung gibt die zeitliche Entwicklung der Stoffmengenkonzentration einer diffundierenden Substanz an. Die Anfangsbedingung gibt die Konzentration zum Beginnzeitpunkt an.)

Die Vorlesung *Analysis 3* bildet unter anderem die Grundlage für die Vorlesung *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach).

0.2 Partielle und gewöhnliche Differentialgleichungen, Beispiel: Transportgleichung

Um den Begriff einer PDG präzise zu machen, erinnern wir uns, dass $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 bezeichnet. Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (zum Beispiel $U = \mathbb{R}^n$). Wir betrachten eine Funktion

$$u : U \rightarrow \mathbb{R},$$

d. h. eine Abbildung, die jedem Punkt $x \in U$ eine reelle Zahl zuordnet. Wir schreiben

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (x^1, \dots, x^n).$$

u ist also eine reellwertige Funktion der n Variablen x_1, \dots, x_n .² Wir fixieren eine natürliche Zahl k .

Definition 0.1. Eine partielle Differentialgleichung (PDG) der Ordnung k für u ist eine Gleichung der Form

$$F\left(x, u(x), \text{partielle Ableitungen von } u \text{ bis zur Ordnung } k \text{ im Punkt } x\right) = 0, \forall x \in U, \quad (5)$$

wobei F eine feste Funktion ist.³

Bemerkungen. Im Englischen heisst eine partielle Differentialgleichung *partial differential equation*, abgekürzt *PDE*.

Für $i = 1, \dots, n$ ist die *partielle Ableitung* von u nach der i -ten Variablen x_i die Funktion $u_{x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &:= f'(x_i), \quad \text{wobei} \\ f(t) &:= u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Bemerkung. [Schreibweise “:=”] Der Doppelpunkt in “:=” drückt aus, dass die linke Seite durch die rechte Seite *definiert* wird.

Wir schreiben für diese Ableitung auch

$$\partial_i u := \partial_{x_i} u := \frac{\partial u}{\partial x_i} := u_{x_i}.$$

Beispiel. [(höhere) partielle Ableitung] Wir betrachten den Fall $n = 2$ und die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := x_1 x_2$. Die partiellen Ableitungen von F sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x) &= u_{x_1}(x) = u(\cdot, x_2)'(x_1) = x_2, \\ \partial_2 u(x) &= u_{x_2}(x) = u(x_1, \cdot)'(x_2) = x_1, \\ \partial_2 \partial_1 u(x) &= u_{x_1 x_2}(x) = (u_{x_1})_{x_2}(x) = 1 = u_{x_2 x_1}(x). \end{aligned}$$

(Hier bezeichnet $u(\cdot, x_2)$ die Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} gegeben durch $u(\cdot, x_2)(t) := u(t, x_2)$.) Alle anderen (höheren) partiellen Ableitungen sind gleich 0.

²Manchmal werden wir für die i -te Variable einen unteren Index verwenden, also x_i schreiben. Manchmal werden wir dafür stattdessen einen oberen Index verwenden, also x^i schreiben. Wenn die Gefahr besteht, den oberen Index mit einer Potenz zu verwechseln, werden wir einen unteren Index verwenden.

³Wir nehmen an, dass diese Funktion nicht bezüglich aller partiellen Ableitungen k -ter Ordnung konstant ist.

Wir betrachten jetzt zuerst den eindimensionalen Fall, also $n = 1$. Dann hängt die Funktion u nur von einer reellen Variablen ab. Eine PDG ist dann dasselbe wie eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG).

Beispiele. [gewöhnliche Differentialgleichung] Betrachte zum Beispiel den Fall $U = \mathbb{R}$ und $k = 1$, d. h. eine GDG der Ordnung 1.

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Funktion F gegeben durch

$$F(x, y_0, y_1) := y_1 - f(x).$$

Gemäss (5) entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} F(x, u(x), u'(x)) &= u'(x) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } u'(x) &= f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x) = \int_0^x f(t) dt + c$$

die Gleichung (6) löst und dass das die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind. Das haben Sie in Analysis 1 gelernt.

- Sei $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion F gegeben durch

$$F(x, y_0, y_1) := y_1 - ay_0.$$

Gemäss (5) entspricht diese Funktion der GDG

$$\begin{aligned} F(x, u(x), u'(x)) &= u'(x) - au(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{d. h. } u'(x) &= au(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Diese GDG beschreibt zum Beispiel radioaktiven Zerfall. Dabei spielt x die Rolle der Zeit t . Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = ce^{ax},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Dass diese Funktion die Gleichung (7) löst, folgt durch Nachrechnen. (Rechnen Sie das nach!) Dass sie die einzige Lösung der Gleichung ist, folgt aus dem Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf für GDG. Siehe [Str, Satz 6.5.1, p. 145].

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ allgemein.

Beispiel. [Transportgleichung]

- Eine einfache partielle Differentialgleichung, die keine GDG ist, ist die Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $U := \mathbb{R}^{n+1}$ als t, x_1, \dots, x_n und kürzen ab $x = (x_1, \dots, x_n)$.⁴ Für eine partiell differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\nabla u := \nabla_x u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

den Gradienten bezüglich x . Erinnerung an Lineare Algebra: Das *euklidische innere Produkt auf \mathbb{R}^n* ist definiert durch

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Die *Transportgleichung zum Vektor v* ist gegeben durch

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0. \tag{8}$$

Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.⁵ Wir definieren die Funktion

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) := g(x - tv). \tag{9}$$

Diese Funktion löst die Transportgleichung (8). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} u_t + v \cdot \nabla u &= - \sum_{i=1}^n g_{x_i}(x - tv) v_i + v \cdot \nabla g(x - tv) \\ &\quad \text{(mit Hilfe der Kettenregel aus Analysis 2)} \\ &= - \nabla g(x - tv) \cdot v + v \cdot \nabla g(x - tv) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Für Details zur Kettenregel siehe Übungsserie 2.)

Bemerkungen. [Transportgleichung]

⁴Wir schreiben also einen Punkt in \mathbb{R}^{n+1} als $(t, x_1, \dots, x_n) = (t, x)$. Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.

⁵Das bedeutet, dass die ersten partiellen Ableitungen von g existieren und stetig sind.

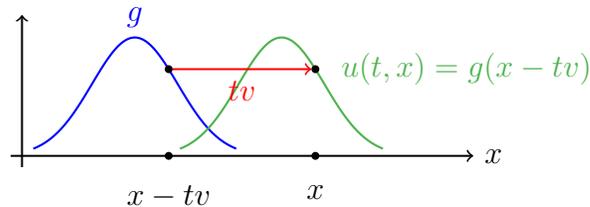


Abbildung 0.2: Anfangsverteilung: blau, transportierte Verteilung: grün.

- Wir betrachten den Fall $m = 3$ und interpretieren die Koordinate t als die Zeit. Die Gleichung (8) beschreibt dann den Transport einer chemischen Substanz u in einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit v , ohne Quellen, Senken und Diffusion. u spielt hierbei die Rolle der Stoffmengenkonzentration. In dieser Situation ist $g = u(0, \cdot)$, also die Konzentrationsverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$. Gemäss der Lösungsformel (9) gilt darum, dass $u(t, \cdot)$, die Konzentrationsverteilung zum Zeitpunkt t , durch die um tv transportierte (d. h. verschobene) Anfangsverteilung g gegeben ist. (Siehe Abbildung 0.2.) Das rechtfertigt den Namen *Transportgleichung* für (8).
- In einer allgemeineren Form der Transportgleichung darf der Vektor v vom Zeitpunkt t und vom Ort x abhängen. Das bedeutet, dass v dann ein sogenanntes *zeitabhängiges Vektorfeld auf $U = \mathbb{R}^m$* ist. Die allgemeinere Transportgleichung beschreibt den Transport einer chemischen Substanz in der Strömung, die durch die zeit- und ortsabhängige Geschwindigkeit $v(t, x)$ gegeben ist. Das gilt, falls die transportierende Flüssigkeit *inkompressibel*, d. h. nicht zusammendrückbar ist.

Beispiel. [keine PDG] Die Gleichung

$$u'(x) = u(x - 1)$$

ist keine partielle Differentialgleichung⁶, weil sie nicht die Form (5) hat. Das Problem ist, dass das Argument $(x - 1)$ der Funktion u sich vom Argument (x) ihrer Ableitung unterscheidet. Diese Gleichung ist eine sogenannte *retardierte Differentialgleichung* (English *delay differential equation*).

0.3 Laplace-, Wellen-, Wärmeleitungsgleichung

In dieser Vorlesung werden wir die *drei grossen partiellen Gleichungen* behandeln, nämlich:

- die Laplace-Gleichung

⁶im Sinn dieser Vorlesung

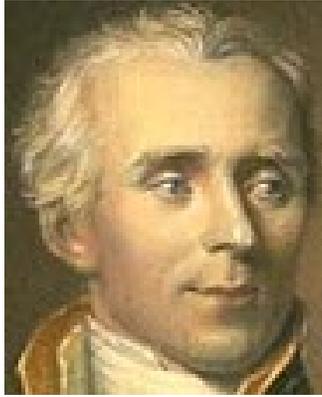


Abbildung 0.3: Pierre-Simon Laplace, 1749–1827, französischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

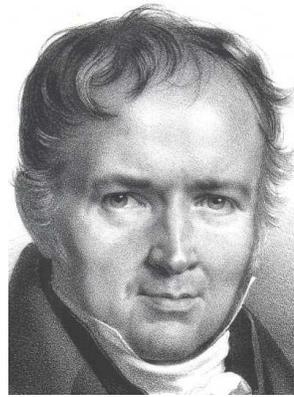


Abbildung 0.4: Siméon Denis Poisson, 1781–1840, französischer Physiker und Mathematiker.

- die Wellengleichung
- die Wärmeleitungsgleichung = Diffusionsgleichung

Um diese Gleichungen aufzuschreiben, brauchen wir die folgende Definition.

Definition 0.2. Der Laplace-Operator Δ ist gegeben durch

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u. \quad (10)$$

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die *inhomogene Laplace-Gleichung* mit *Inhomogenität* f (oder *Poisson-Gleichung*) ist gegeben durch

$$\Delta u = f. \quad (11)$$

Diese Gleichung ist nach Pierre-Simon Laplace und Siméon Denis Poisson benannt, siehe die Abbildungen 0.3, 0.4. Sie ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir definieren nämlich die Funktion F durch

$$F\left(x, y, y_1, \dots, y_n, y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{n1}, \dots, y_{nn}\right) := \left(\sum_{i=1}^n y_{ii}\right) - f(x).^7$$

⁷Hier kommen Variablen y_{ij} vor, die von zwei Indizes i und j abhängen.

Dann ist die inhomogene Laplacegleichung (11) gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u(x) - f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) - f(x) \\ &= F\left(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), u_{x_1 x_1}(x), \dots, u_{x_1 x_n}(x), u_{x_n x_1}(x), \dots, u_{x_n x_n}(x)\right). \end{aligned}$$

(Wir setzen hier $u_{x_i x_j}(x)$ für die Variable y_{ij} ein.) D. h. , die Gleichung (11) hat die gewünschte Form (5). Die (inhomogene) Laplacegleichung ist der Prototyp einer *elliptischen* PDG. Sie bestimmt zum Beispiel das elektrostatische Potential u , das durch eine Ladungsverteilung $-f$ erzeugt wird.⁸ Der Fall $f = 0$ entspricht der (*homogenen*) *Laplace-Gleichung* PDG

$$\Delta u = 0. \quad (12)$$

Im Fall $n = 3$ beschreibt diese Gleichung zum Beispiel den Gleichgewichtszustand einer chemischen Substanz. Dabei ist u die Stoffmengenkonzentration. (Siehe die Bemerkungen unten nach der Diffusionsgleichung (14).)

Wir schreiben jetzt $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ für die Koordinaten in \mathbb{R}^{n+1} und fassen t als die Zeit und x als den Ort auf. Die Wellengleichung ist die PDG

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad (13)$$

wobei $c > 0$ eine reelle Konstante ist, die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* genannt wird. Diese Gleichung ist der Prototyp einer *hyperbolischen* PDG. Im Fall $n = 3$ beschreibt die Gleichung zum Beispiel die Ausbreitung einer Schallwelle. Dabei ist u der Schalldruck. Die Gleichung (13) beschreibt auch die Schwingung einer Saite.

Die *Wärmeleitungsgleichung* (oder *Diffusionsgleichung*) ist die PDG

$$u_t = a \Delta u, \quad (14)$$

wobei $a > 0$ eine reelle Konstante ist. Diese Gleichung ist der Prototyp einer *parabolischen* PDG. Die Gleichung bestimmt, wie sich die räumliche Temperaturverteilung in einem Gebiet zeitlich entwickelt. Dabei ist $n = 3$, u die Temperatur und a die Temperaturleitfähigkeit. Die Gleichung beschreibt auch die Zeitentwicklung der (Stoffmengen-)Konzentration einer diffundierenden chemischen Substanz, wobei dann $n = 3$, u die

⁸Hier haben wir die physikalischen Einheiten so gewählt, dass die elektrische Feldkonstante ε_0 gleich 1 ist.

⁹Hier und im Folgenden ist Δu immer noch die Summe der zweiten partiellen Ableitungen nach allen Variablen x_i , wie in (10). Δu enthält also keine Ableitungen nach t .

Konzentration und a der Diffusionskoeffizient sind.¹⁰ Das werden wir im Abschnitt 0.5 im Fall sehen, in dem u nicht von x_1 und x_2 abhängt.

Das System ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sich die Konzentration (in der Zeit) nicht ändert, d. h. wenn $u_t \equiv 0$. In diesem Fall wird die Diffusionsgleichung (14) zur Laplacegleichung (12).

Die Lösungen der drei Typen von PDG (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) haben verschiedene Eigenschaften. Zum Beispiel konvergiert die Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei isolierenden Randbedingungen gegen den Mittelwert der Anfangsbedingung, wenn die Zeit gegen unendlich geht. Das bedeutet, dass sich Temperatur- und Konzentrationsunterschiede über die Zeit hinweg ausgleichen. Für eine Lösung der Wellengleichung gilt diese Eigenschaft nicht. Stattdessen pflanzt sich eine solche Lösung immer weiter fort.

0.4 Ein paar allgemeine Bemerkungen

Der oben erwähnte Satz von Picard-Lindelöf garantiert, dass jede *gewöhnliche* DG eine Lösung besitzt, mindestens für kurze Zeit. Im Gegensatz dazu gibt es partielle Differentialgleichungen, wofür keine Lösung existiert. Des Weiteren ist für einige PDG nicht bewiesen, dass es eine Lösung gibt. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die Navier-Stokes-Gleichung, die viskose Flüssigkeiten beschreibt. Das Clay Mathematics Institute hat eine Million US-Dollar für einen Beweis ausgelobt, dass diese Gleichung eine glatte Lösung besitzt.

Für die meisten PDG gibt es keine konkrete Lösungsformel. Für viele PDG gibt es aber einen Beweis dafür, dass eine Lösung existiert. Da wir uns in dieser Vorlesung nur mit PDG beschäftigen werden, wofür es eine Lösungsformel gibt, werden wir also nur mit einem kleinen Teil der Theorie der PDG behandeln.

0.5 Konzentration einer diffundierenden chemischen Substanz, Diffusionsgleichung

Diffusion ist der ohne äussere Einwirkung eintretende Ausgleich von Konzentrationsunterschieden in Stoffgemischen. Dieser Ausgleich findet aufgrund der thermischen Be-

¹⁰Wir nehmen hier an, dass die Substanz nicht chemisch reagiert.

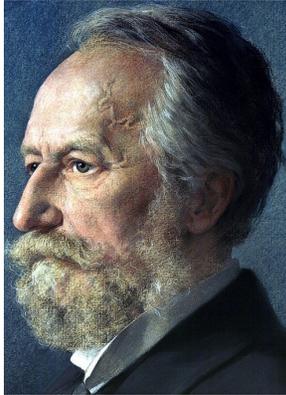


Abbildung 0.5: Adolf Fick, 1829–1901, deutscher Physiologe

wegung der Teilchen statt. Als ein Beispiel sorgt Diffusion dafür, dass sich ein Tropfen Tinte in einen Behälter mit Wasser ausbreitet, wenn man ihn hineingibt.

Das zweite Gesetz von Fick besagt, dass die Zeitentwicklung der (Stoffmengen-)Konzentration einer diffundierenden chemischen Substanz durch die Diffusionsgleichung (14) beschrieben wird. Zum Abschluss dieser einführenden Vorlesung leite ich dieses Gesetz wie versprochen im Fall her, dass die Konzentration nicht von x_1 und x_2 abhängt. (Um das Gesetz in der allgemeinen Situation herzuleiten, benötigen wir den Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz), den Sie in Analysis 2 kennengelernt haben.) Wir schreiben:

$c(t, x) :=$ Konzentration der Substanz zum Zeitpunkt t am Ort x (in mol m^{-3})

Wir nehmen das Folgende an:

- (a) Es gibt keine chemischen Reaktionen, also keine Quellen oder Senken für die Konzentration. Das bedeutet, dass die zeitliche Veränderung der totalen Stoffmenge in jedem offenen Teilgebiet $V \subseteq U$ gleich der Stoffmenge ist, die insgesamt pro Zeiteinheit in das Gebiet V hineinfließt.

Gesetz 0.3 (zweites Gesetz von Fick). *Unter dieser Annahme gibt es eine Konstante $a = D$, sodass die Konzentration $u = c$ die Diffusionsgleichung (14) erfüllt, d. h.*

$$c_t = D\Delta c. \tag{15}$$

Dieses Gesetz ist nach Adolf Fick benannt, siehe Abbildung 0.5.

Bemerkung. Die Konstante D heisst der Diffusionskoeffizient.

Wir leiten das Gesetz 0.3 im Fall her, dass c nicht von x_1 und x_2 abhängt. Die Herleitung beruht auf dem ersten Gesetz von Fick. Um dieses zu formulieren, schreiben wir:

$v(t, x) :=$ Geschwindigkeitsvektor der Substanz (Flüssigkeit) zur Zeit t am Ort x

$j := cv =$ Stoffmengenstromdichte

Die euklidische Norm der Stoffmengenstromdichte,

$$\|j\| := \sqrt{\sum_{i=1}^3 j_i^2},$$

ist die Stoffmenge, die pro Flächen- und Zeiteinheit durch eine infinitesimale Fläche fließt, worauf j senkrecht steht.

Gesetz 0.4 (erstes Gesetz von Fick). *Die Teilchenstromdichte j ist proportional und entgegengerichtet zum Gradienten der Konzentration, d. h., es gibt eine Konstante $D > 0$, sodass*

$$j = -D\nabla c. \tag{16}$$

Intuitive Herleitung des Gesetzes 0.4: Wir betrachten die Situation, in der die Konzentration linear von x abhängt¹¹ und sich zeitlich nicht ändert. Durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems können wir dann annehmen, dass es Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt, sodass

$$c(t, x) = -\alpha x_3 + \beta, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0. \tag{17}$$

Aus Symmetriegründen ist die Stoffmengenstromdichte j dann überall und zu allen Zeiten gleich und parallel zur x_3 -Richtung. Um zum Beispiel zu sehen, dass j parallel zur x_3 -Richtung ist, drehen wir das Koordinatensystem um die x_3 -Achse. Dann bleibt die Konzentration c gleich. Daher bleibt auch j gleich. Das bedeutet, dass j parallel zur x_3 -Achse ist. Es ist intuitiv einsichtig, dass Teilchen in (positiver) x_3 -Richtung fließen, da dadurch die Konzentration ausgeglichen wird.¹² Des Weiteren ist es naheliegend, dass $\|j\|$ proportional zum Unterschied der Konzentrationen in den Punkten 0 und

¹¹mit additiver Konstante

¹² c nimmt gemäß (17) in x_3 -Richtung ab.

$(0, 0, -1)$ ist. D. h. , es gibt eine Konstante $D > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \|j\| &= D(c(t, 0, 0, -1) - c(t, 0)) \\ &= D\alpha \quad (\text{gemäss (17)}) \\ &= D|c_{x_3}| \\ &= D\|\nabla c\| \quad (\text{da } \nabla c = (0, 0, c_{x_3})). \end{aligned}$$

Da j in x_3 -Richtung zeigt und ∇c in negative x_3 -Richtung zeigt, folgt, dass

$$j = -D\nabla c,$$

d. h., das Gesetz 0.4 gilt, falls die Konzentration linear von x abhängt und sich zeitlich nicht ändert. In der allgemeinen Situation folgt das Gesetz aus diesem Spezialfall, indem wir ein kleines Teilgebiet um einen gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ anschauen und c durch eine lineare Funktion annähern. \square

Bemerkung. In dieser intuitiven Herleitung haben wir angenommen, dass Teilchen in Richtung tieferer Konzentration fließen und dass die Stromdichte proportional zum Unterschied der Konzentrationen in zwei festen Punkten ist.¹³ Diese Annahmen können mit Hilfe der statistischen Mechanik begründet werden.

Herleitung des Gesetzes 0.3 im Fall, dass c nicht von x_1 und x_2 abhängt:

Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir nur den Fall $U = \mathbb{R}^3$. (Das ist keine wirkliche Einschränkung.) Wir fixieren ein Intervall $I = (x_3^-, x_3^+)$. Wir schreiben V für das Gebiet, das durch $0 < x_1, x_2 < 1, x_3 \in I$ gegeben ist. Da c nicht von x_1 und x_2 abhängt und die Fläche des Quadrates $0 < x_1, x_2 < 1$ gleich 1 ist, gilt:

$$(\text{totale}) \text{ Stoffmenge in } V \text{ zum Zeitpunkt } t = \int_{x_3^-}^{x_3^+} c(t, x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad (18)$$

wobei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig ist. Da c nicht von x_1 und x_2 abhängt, ist der Gradient von c gegeben durch

$$\nabla c(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{x_3}(t, x) \end{pmatrix}.$$

Wir fixieren $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wegen des ersten Gesetzes von Fick gilt (16). Also ist j parallel zur x_3 -Achse. Daher fließt keine Substanz aus den Seitenflächen von V heraus, und es gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Stoffmenge, die pro Zeiteinheit ins Gebiet } V \text{ hineinfließt} \\ &= j_3(t, x_1, x_2, x_3^-) - j_3(t, x_1, x_2, x_3^+) \end{aligned} \quad (19)$$

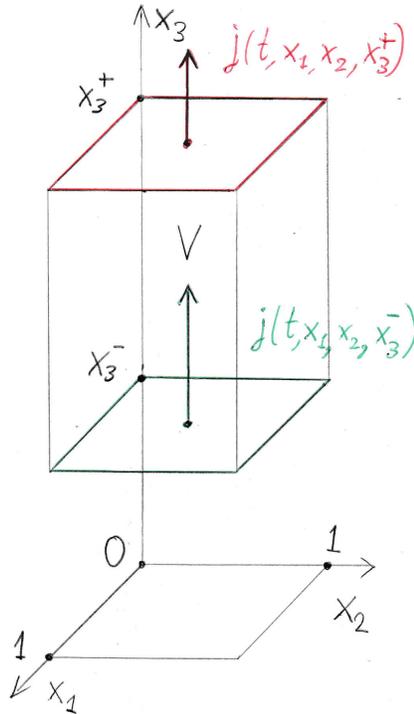


Abbildung 0.6: Durch den Boden fließt pro Zeiteinheit die Stoffmenge $j_3(t, x_1, x_2, x_3^-)$ in das Gebiet V (roter Pfeil). Durch den Deckel fließt pro Zeiteinheit die Stoffmenge $j_3(t, x_1, x_2, x_3^+)$ aus dem Gebiet V (roter Pfeil).

(Siehe Abbildung 0.6.) Es gilt:

¹³Das ist sinnvoll, falls die Konzentration wie angenommen, linear vom Ort abhängt.

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_3^-}^{x_3^+} \partial_t c(t, x_1, x_2, x_3) dx_3 \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{x_3^-}^{x_3^+} c(t, x_1, x_2, x_3) dx_3 \\
 & \quad \text{(Das folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.} \\
 & \quad \text{Dieser Satz gehört zur sogenannten } \textit{Masstheorie} \text{.)} \\
 &= \frac{d}{dt} \text{Stoffmenge in } V \text{ zum Zeitpunkt } t \quad \text{(wegen (18))} \\
 &= j_3(t, x_1, x_2, x_3^-) - j_3(t, x_1, x_2, x_3^+) \quad (20) \\
 & \quad \text{(aufgrund von (19) und unserer Annahme (a), S. 13)} \\
 &= -Dc_{x_3}(t, x_1, x_2, x_3^-) + Dc_{x_3}(t, x_1, x_2, x_3^+) \quad \text{(wegen des Gesetzes von Fick, (16))} \\
 &= \int_{x_3^-}^{x_3^+} Dc_{x_3x_3}(t, x_1, x_2, x_3) dx_3,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet haben. Da dies für alle Intervalle $I = (x_3^-, x_3^+)$ gilt, folgt, dass

$$\partial_t c(t, x_1, x_2, x_3) = Dc_{x_3x_3}(t, x_1, x_2, x_3) = D\Delta c(t, x_1, x_2, x_3),$$

d. h., die Diffusionsgleichung (15) gilt. \square

Kapitel 1

Linearität einer PDG, Typen linearer PDG zweiter Ordnung (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch), Anfangs- und Randbedingungen, Trennung der Variablen

1.1 Linearität einer PDG, Superpositionsprinzip

Eine PDG heisst *linear* g. d. w. ¹ in ihr die gesuchte Funktion und alle ihre partiellen Ableitungen nur zur ersten Potenz, also linear, auftreten (falls sie überhaupt auftreten). Die folgende Definition macht das präzise.

Definition 1.1 (lineare PDG). *Wir nennen eine PDG² linear g. d. w. sie in die folgende Form gebracht werden kann, indem wir Terme auf die linke oder rechte Seite verschieben:*

$$\left(\begin{array}{l} \text{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \text{Funktion von } x \text{ mal } u \text{ oder (höhere) partielle Ableitung von } u \end{array} \right) = f(x). \quad (1.1)$$

Im Fall $f \equiv 0$ nennen wir eine solche PDG homogen, sonst inhomogen.

¹genau dann, wenn

²oder ein System partieller DG

Die oben genannten PDG, mit denen wir uns in dieser Vorlesung befassen werden, sind alle *linear*. Solche Gleichungen sind im Allgemeinen einfacher zu behandeln als nicht lineare PDG.

Beispiele. [(nicht-)lineare Differentialgleichungen]

- Die Transportgleichung (8), die (homogene) Laplace-Gleichung (12), die Wellengleichung (13) und die Wärmeleitungsgleichung (14) sind alle linear und homogen. (Um das zu sehen, schreiben wir zum Beispiel die Wellengleichung um als $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$.)
- Die Poisson-Gleichung (11) ist linear und inhomogen (falls $f \neq 0$).

Bemerkung. [homogene Linearität] Eine PDG ist linear und homogen g. d. w. ihre rechte Seite gleich null ist und ihre linke Seite linear von der gesuchten Funktion u abhängt³. D. h. , wenn wir für die linke Seite $T(u)$ schreiben, dann gilt

$$T(au) = aT(u), \quad T(u + v) = T(u) + T(v),$$

für jede reelle Zahl a und alle genügend differentierbaren Funktionen u, v . Das rechtfertigt die Bezeichnung *lineare PDG*.

Aus dieser Bemerkung folgt das Superpositionsprinzip. Um dieses zu formulieren, erinnern wir uns an das Folgende aus der linearen Algebra: Eine (endliche reelle) Linearkombination der Funktionen u_1, \dots, u_ℓ ist eine Funktion der Form $a_1 u_1 + \dots + a_\ell u_\ell$, wobei a_1, \dots, a_k reelle Zahlen sind.

Proposition 1.2 (Superpositionsprinzip). *Jede (endliche) Linearkombination von Lösungen einer linearen und homogenen PDG löst die PDG ebenfalls.*

Beispiele. [Superpositionsprinzip]

- Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' = u. \tag{1.2}$$

Diese Gleichung ist linear, da wir sie umschreiben können als

$$1 \cdot u'' + (-1) \cdot u = 0$$

und sie dann die Form (1.1) hat. (Die Koeffizienten 1 und -1 sind (konstante) Funktionen von x .) Die Funktionen

$$u_1(x) := e^x, \quad u_2(x) := e^{-x}$$

³nachdem wir alle Terme, die (partielle Ableitungen von) u enthalten, nach links gebracht haben

lösen die GDG (1.2). Gemäss Proposition 1.2 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle reellen Zahlen a_1, a_2 die Funktion

$$u := a_1 u_1 + a_2 u_2, \quad u(x) = a_1 e^x + a_2 e^{-x},$$

ebenfalls die GDG (1.2). Wir können das auch direkt überprüfen. Es gilt

$$\begin{aligned} u'' &= (a_1 u_1 + a_2 u_2)'' \\ &= (a_1 u_1' + a_2 u_2')' \quad (\text{da Ableiten eine lineare Operation ist}) \\ &= a_1 u_1'' + a_2 u_2'' \quad (\text{da Ableiten eine lineare Operation ist}) \\ &= a_1 u_1 + a_2 u_2 \quad (\text{da } u_1 \text{ und } u_2 \text{ die GDG (1.2) lösen}) \\ &= u. \end{aligned}$$

Also löst u die GDG (1.2).

- Betrachte die (homogene) Laplacegleichung (12),

$$\Delta u = 0, \tag{1.3}$$

im Fall $n = 2$. Die Funktionen

$$u_1(x) := e^{x_1} \sin(x_2), \quad u_2(x) := e^{x_1} \cos(x_2)$$

lösen diese PDG. (Rechnen Sie das nach!) Gemäss Proposition 1.2 (Superpositionsprinzip) löst daher für alle reellen Zahlen a_1, a_2 die Funktion

$$u := a_1 u_1 + a_2 u_2, \quad u(x) = a_1 e^{x_1} \sin(x_2) + a_2 e^{x_1} \cos(x_2)$$

ebenfalls die PDG (1.3). (Rechnen Sie das direkt nach!)

Bemerkung. [Superpositionsprinzip] Für eine *nicht*lineare PDG gilt das Superpositionsprinzip im Allgemeinen nicht. Ein Beispiel dafür ist die GDG

$$u' = u^2. \tag{1.4}$$

Diese Gleichung ist nicht linear, da auf der rechten Seite u quadratisch vorkommt. Die Funktion

$$u(x) := -\frac{1}{x}$$

löst die Gleichung (1.4). (Rechnen Sie das nach!) Wenn a eine reelle Zahl ist, dann löst au die GDG (1.4) nur in den Fällen $a = 0$ und $a = 1$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (au)^2 &= a^2 u^2 \\ &= a^2 u' \quad (\text{da } u \text{ die GDG (1.4) löst}) \\ &= a(au)'. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich $(au)'$, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist. Das bedeutet, dass au die GDG (1.4) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die GDG (1.4) nicht.

1.2 Typen linearer PDG zweiter Ordnung (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch)

Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst *elliptisch*, falls in jedem Punkt die Matrix der Koeffizienten der zweiten partiellen Ableitungen positiv definit ist. Der Prototyp einer elliptischen PDG ist die Laplacegleichung. Lösungen homogener elliptischer PDG erfüllen das Maximumprinzip, welches besagt, dass die Lösung ihr Maximum (und Minimum) auf dem Rand annimmt.

Um Elliptizität einer PDG zu erklären, erinnern wir uns an den Begriff der positiven Definitheit aus der linearen Algebra.⁴ Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reelle $n \times n$ Matrix.

Beispiel 1.3. Wenn $n = 2$ ist, dann hat so eine Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A heisst *positiv definit* g. d. w. gilt⁵:

$$v^T A v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (1.5)$$

Beispiel 1.4. Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist die Diagonalmatrix

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

⁴Dieser Begriff spielte auch in Analysis 2 bei der Charakterisierung kritischer Punkte einer Funktion eine Rolle.

⁵Für eine Matrix M ist hierbei M^T die transponierte Matrix.

⁶Seien A und B Mengen. Wie Sie in Analysis 1 gelernt haben, ist das (*relative*) *Komplement von A in B* (oder die *mengentheoretische Differenz von A in B*) die Menge $B \setminus A := \{b \in B \mid b \notin A\}$, also die Menge aller Elemente b von B , die nicht in A liegen. In (1.5) stellen wir die Bedingung $v^T A v > 0$ also an jeden Vektor v in \mathbb{R}^n , der nicht in $\{0\}$ liegt, d. h., nicht gleich 0 ist.

positiv definit, da für jeden Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} v^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) v &= \sum_{i=1}^n v_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Andererseits ist die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ nicht positiv definit, falls eine (oder mehrere) der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ negativ oder null ist. (Warum?)

Bemerkungen. [Positive Definitheit] Wir nehmen an, dass die Matrix A symmetrisch ist, d. h. $A^T = A$.

- (i) Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte (strikt) positiv sind. Das folgt aus Beispiel 1.4 und dem Spektralsatz aus der linearen Algebra, der besagt, dass jede symmetrische Matrix diagonalisiert werden kann. (Im diagonalen Fall sind die diagonalen Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte der Matrix.)
- (ii) Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist das Produkt ihrer Eigenwerte, d. h.

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A sind (mit Vielfachheiten).

- (iii) Wir betrachten den Fall $n = 2$. Gemäss (ii) gilt dann $\det A = \lambda_1 \lambda_2$. Die Determinante von A ist daher genau dann positiv, falls die Eigenwerte von A nicht null sind und dasselbe Vorzeichen haben. Wegen (i) ist das genau dann der Fall, wenn A oder $-A$ positiv definit ist.

Seien jetzt U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n (zum Beispiel $U = \mathbb{R}^n$) und

$$a_{ij}, b_i, c, f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

stetige Funktionen. Wir betrachten die PDG

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f. \tag{1.6}$$

Definition 1.5 (elliptische PDG). Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst elliptisch g. d. w. sie durch Verschieben von Termen^{7 8} in die Form (1.6) gebracht werden kann, und dabei für jeden Punkt $x \in U$ die Matrix $(a_{ij}(x))_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist.

Beispiel. [elliptische PDG] Die (inhomogene) Laplacegleichung

$$\Delta u = f$$

ist elliptisch. Um das zu sehen, definieren wir

$$a_{ij}(x) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}, \quad b_i(x) := 0, \quad c(x) := 0.$$

Die Laplacegleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= \Delta u \\ &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \\ &= \sum_{i,j} (\delta_{ij} = a_{ij}) u_{x_i x_j} + \sum_i (0 = b_i) u_{x_i} + (0 = c) u. \end{aligned}$$

Sie hat also die Form (1.6). Wir haben

$$(a_{ij}(x) = \delta_{ij})_{ij} = \mathbb{1},$$

die Einheitsmatrix. Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit, wie wir in Beispiel 1.4 gesehen haben. Daher ist die Laplacegleichung gemäss Definition 1.5 elliptisch, wie behauptet.

Um die Eigenschaften *hyperbolisch* und *parabolisch* zu definieren, betrachten wir nun eine offene Teilmenge U des \mathbb{R}^{n+1} . Wir schreiben die Standardkoordinaten in \mathbb{R}^{n+1} als t, x_1, \dots, x_n .¹⁰ Seien

$$a_{ij}, b_i, c, f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

⁷ von der linken Seite auf die rechte Seite oder umgekehrt

⁸ Wir erlauben auch, dass beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Konstante ungleich 0 multipliziert werden.

⁹ δ_{ij} heisst *Kronecker-Delta*.

¹⁰ Wir schreiben also einen Punkt in \mathbb{R}^{n+1} als $(t, x_1, \dots, x_n) = (t, x)$. Die Standardkoordinaten sind kartesische Koordinaten.

stetige Funktionen. Wir definieren den Operator L durch

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu. \quad (1.7)$$

Wir betrachten die partiellen Differentialgleichungen

$$u_{tt} + Lu = f, \quad (1.8)$$

$$u_t + Lu = f. \quad (1.9)$$

Definition 1.6 (hyperbolische, parabolische PDG). *Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst hyperbolisch (respektive parabolisch) g. d. w. sie mittels Verschieben von Termen und einer lokalen¹¹ Koordinatentransformation in die Form (1.8) (respektive (1.9)) gebracht werden kann, sodass für jeden Punkt $(t, x) \in U$ die Matrix $(a_{ij}(t, x))_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist. (Diese Matrix steckt gemäss (1.7) in Lu drin.)*

Beispiele. [hyperbolische, parabolische PDG]

(i) Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

(mit $c > 0$) ist hyperbolisch. Um das zu sehen, definieren wir

$$a_{ij}(t, x) := c^2 \delta_{ij}, \quad b_i(t, x) := 0, \quad c(t, x) := 0.$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt} - c^2 \Delta u \\ &= u_{tt} - \sum_{i=1}^n c^2 u_{x_i x_i} \\ &= u_{tt} - \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i (0 = b_i) u_{x_i} + (0 = c) u. \end{aligned}$$

Sie hat also die Form (1.8). Wir haben $(a_{ij}(x)) = c^2 \mathbb{1}$. Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit, wie wir in Beispiel 1.4 gesehen haben. Daher ist die Wellengleichung gemäss Definition (1.6) hyperbolisch, wie behauptet.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a \Delta u$$

(mit $a > 0$) ist parabolisch. Das folgt aus einem zu (i) analogen Argument. (Überprüfen Sie das!)

¹¹Mit *lokal* meinen wir, dass die Koordinatentransformation nur in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung eines gegebenen Punktes definiert ist.

Bemerkung. [hyperbolische, parabolische PDG im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$] Wir betrachten den Fall $n = 1$. Dann ist U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$, und die Koordinaten sind t, x_1 . In diesem Fall ist eine lineare PDG zweiter Ordnung genau dann hyperbolisch, wenn sie mittels Verschieben von Termen und einer lokalen Koordinatentransformation in die Form

$$u_{tt} - a_{11}u_{x_1x_1} + b_1u_{x_1} + cu = f$$

gebracht werden kann, wobei $a_{11} > 0$. (Warum?) Eine ähnliche Aussage gilt für Parabolizität.

Im Fall, indem U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist, können wir Elliptizität und Hyperbolizität wie folgt charakterisieren. Wir betrachten eine lineare PDG zweiter Ordnung und schreiben sie in der Form

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu = f. \quad (1.10)$$

Wir definieren die Diskriminante dieser PDG als

$$D := a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (1.11)$$

Proposition 1.7 (Elliptizität und Hyperbolizität im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$). *Wir nehmen an, dass U eine weg-zusammenhängende¹² offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist. Die PDG (1.10) ist*

(i) *elliptisch genau dann, wenn $D > 0$,*

(ii) *hyperbolisch genau dann, wenn $D < 0$.*

Bemerkungen 1.8. (i) Falls die PDG (1.10) *parabolisch* ist, dann ist $D = 0$. Falls $D = 0$ ist, dann ist die PDG (1.10) jedoch nicht unbedingt parabolisch (im Sinne der Definition 1.6). Ein Beispiel dafür ist die PDG

$$u_{x_1x_1} = 0.$$

Für diese PDG ist $D = 0$, aber wir können diese Gleichung nicht mittels Verschieben von Termen und einer lokalen Koordinatentransformation in die Form (1.9) bringen, wobei $(a_{11}(x))$ für jedes x positiv definit ist, d. h. $a_{11}(x) > 0$.

¹²Das bedeutet, dass alle Punkte in U miteinander durch einen stetigen Weg innerhalb von U verbunden werden können, d. h., dass U nicht aus mehreren unverbundenen Teilen besteht. Ein Beispiel ist $U = \mathbb{R}^2$.

- (ii) Die in dieser Vorlesung gebrauchten Definitionen von Elliptizität, Hyperbolizität und Parabolizität sind in der reinen Mathematik gängig. Sie werden¹³ zum Beispiel im Buch [Eva10] von L. C. Evans verwendet.¹⁴ In der angewandten Mathematik werden diese Begriffe stattdessen oft nur im Fall definiert, dass U eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist. Die PDG wird dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch genannt, je nachdem, ob ihre Diskriminante D grösser 0, kleiner 0 oder gleich 0 ist. Siehe zum Beispiel das Buch von St. J. Farlow [Far93, Seite 6]. Für die Eigenschaften elliptisch und hyperbolisch stimmt diese Definition wegen Proposition 1.7 mit der hier gebrauchten Definition überein. Für die Eigenschaft parabolisch weicht sie jedoch von der hier gebrauchten Definition ab. (Siehe Bemerkung (i).) Der Vorteil der hier gebrauchten Definition ist, dass damit nur PDG parabolisch genannt werden, deren Lösungen gewisse Eigenschaften haben, die als charakteristisch für parabolische Gleichungen gelten.

Teil (i) von Proposition 1.7 folgt aus der Bemerkung 1.2(iii).

Beispiele. [elliptische und hyperbolische PDG im Fall von $U \subseteq \mathbb{R}^2$] Wir betrachten den Fall $U = \mathbb{R}^2$.

- Wir betrachten die PDG

$$(1 + x_1^2)u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} + 2u_{x_1} + 3u. \quad (1.12)$$

Um zu überprüfen, welchen Typ diese PDG hat, verschieben wir die rechten Terme auf die linke Seite. Damit erhalten wir

$$(1 + x_1^2)u_{x_1x_1} + 2 \cdot \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - 2u_{x_1} - 3u = 0.$$

Diese PDG hat die Form (1.10), wobei

$$a_{11}(x) = 1 + x_1^2, \quad a_{12} \equiv \frac{1}{2}, \quad a_{22} \equiv 1, \quad b_1 \equiv -2, \quad b_2 \equiv 0, \quad c \equiv -3.$$

Die Diskriminante (1.11) der PDG ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Diskriminante}(x) &= a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}^2(x) \\ &= (1 + x_1^2) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} + x_1^2 \\ &> 0, \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Gemäss Proposition 1.7(i) ist die PDG (1.12) daher elliptisch.

¹³in leicht abgewandelter Form

¹⁴Siehe die Seiten 312, 399 und 372 in diesem Buch.

- Wir betrachten die PDG

$$u_{x_1x_1} + (4 + 2x_1^2)u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} = 2u_{x_1} + 3u. \quad (1.13)$$

Um zu überprüfen, welchen Typ diese PDG hat, verschieben wir die rechten Terme auf die linke Seite. Damit erhalten wir

$$u_{x_1x_1} + 2 \cdot (2 + x_1^2)u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - 2u_{x_1} - 3u = 0.$$

Diese PDG hat die Form (1.10), wobei

$$a_{11} \equiv 1, \quad a_{12}(x) = 2 + x_1^2, \quad a_{22} \equiv 1, \quad b_1 \equiv -2, \quad b_2 \equiv 0, \quad c \equiv -3.$$

Die Diskriminante (1.11) der PDG ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Diskriminante}(x) &= a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}^2(x) \\ &= 1 \cdot 1 - (2 + x_1^2)^2 \\ &\leq 1 - 4 \\ &< 0, \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Gemäss Proposition 1.7(ii) ist die PDG (1.13) daher hyperbolisch.

Bemerkungen. [Typen partieller DG]

- Die drei Typen *elliptisch*, *hyperbolisch* und *parabolisch* schliessen sich gegenseitig aus. D. h. , falls eine PDG einen der drei Typen hat, dann hat sie keinen anderen der drei Typen.
- Nicht jede lineare PDG zweiter Ordnung hat einen der drei hier beschriebenen Typen. (Siehe die Beispiele unten.)

Beispiele. [PDG, die keinen der drei Typen haben] Die folgenden PDG sind linear und zweiter Ordnung, aber weder elliptisch noch hyperbolisch noch parabolisch. Sie können nämlich in keine der drei entsprechenden Formen gebracht werden.¹⁵

- $U = \mathbb{R}^2$,

$$u_{x_1x_1} = 0 \quad {}^{16}$$

¹⁵Für die elliptische Form ist das einfach zu sehen. Es ist auch einfach zu sehen, dass die Gleichungen weder die hyperbolische Form (1.8) noch die parabolische Form (1.9) haben. Sie können auch nicht durch eine Koordinatentransformation lokal auf eine dieser Formen gebracht werden. Das ist schwieriger zu beweisen.

¹⁶Vergleiche mit Bemerkung 1.8(i).

- $n = 4, U = \mathbb{R}^4,$

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = 0$$

Bemerkung. [Terminologie] Der Grund für die Terminologie *elliptisch* ist, dass eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ genau dann positiv definit ist, wenn die Gleichung

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 1$$

ein Ellipsoid in \mathbb{R}^n beschreibt. (Im Fall $n = 2$ ist ein Ellipsoid dasselbe wie eine Ellipse.)

Der Grund für die Terminologie *hyperbolisch*, *parabolisch* ist analog.

1.3 Anfangs- und Randbedingungen anhand der Beispiele der Wärmeleitungs- und Wellengleichungen

In physikalischen und chemischen Anwendungen beschreiben partielle Differentialgleichungen alleine ein System meistens noch nicht vollständig. Das System wird jedoch oft vollständig beschrieben, wenn wir zusätzlich zur Differentialgleichung noch Anfangs- und Randbedingungen hinzunehmen. Diese Bedingungen werden oft durch den experimentellen Aufbau vorgegeben.

Betrachten wir zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung im Fall *einer* Raumdimension. Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem dünnen geraden Metallstab. Wir können eine bestimmte Temperaturverteilung zum Anfangszeitpunkt vorgeben, indem wir den Stab an verschiedenen Stellen erhitzen oder abkühlen. Diese Vorgabe entspricht einer *Anfangsbedingung*. Wir schreiben x_- und x_+ für den linken und rechten Endpunkt des Stabes. Der Stab wird dann durch das Intervall $[x_-, x_+]$ beschrieben. Wir schreiben

$u(t, x) :=$ Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t am Ort x

$t_0 :=$ Anfangszeitpunkt

$u_0 :=$ vorgegebene anfängliche Temperaturverteilung

Die Anfangsbedingung ist dann

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [x_-, x_+]. \quad (1.14)$$

Wir können auch den Stab an beiden Enden zu jeder Zeit auf 0°C kühlen, indem wir diese Enden in Eiswasser legen. Diese Vorgabe entspricht einer *Randbedingung*. Sie wird

durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$u(t, x_-) = 0, \quad u(t, x_+) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.15)$$

Diese Gleichungen sind sogenannte *Dirichlet-Randbedingungen*. Allgemein sind Dirichlet-Randbedingungen Bedingungen von der Form

$$u = g \text{ auf dem Rand von } U^{17},$$

wobei U das Gebiet ist, worauf die gesuchte Funktion u definiert ist, und g eine vorgegebene Funktion ist. Im Falle einer linear PDG nennen wir Dirichlet-Randbedingungen *homogen*, falls $g \equiv 0$. Die Randbedingungen (1.16) sind also homogen. Die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung wird durch die Anfangs- und Randbedingungen (1.14,1.16) eindeutig festgelegt. Das widerspiegelt sich in der Tatsache, dass es eine eindeutige Lösung der Wärmeleitungsgleichung gibt, welche diese Bedingungen löst. (Das werden wir später sehen.)

Statt die Enden des Stabs in Eiswasser zu legen, können wir sie (und den Rest des Stabs) nach aussen isolieren. Die Enden geben dann keine Wärme an die Aussenwelt ab, d. h., die Wärmestromdichte ist an den Enden gleich 0. Gemäss dem Fourierschen Gesetz ist die Wärmestromdichte proportional und entgegengerichtet zum Gradienten der Temperatur u , also zu u_x in unserem räumlich-eindimensionalen Fall. (Dieses Gesetz ist analog zum Gesetz von Fick für die Stoffmengenstromdichte einer chemischen Substanz.) Die Temperaturverteilung erfüllt daher die sogenannten *Neumann-Randbedingungen*

$$u_x(t, x_-) = 0, \quad u_x(t, x_+) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.16)$$

Allgemein sind Neumann-Randbedingungen Bedingungen von der Form

$$(\text{Ableitung von } u \text{ in Richtung von } \nu) = g \text{ auf dem Rand von } U^{18},$$

wobei $\nu(x)$ für jeden Punkt auf dem Rand des Gebiets U der nach aussen zeigende Einheitsvektor ist, der senkrecht auf dem Rand von U steht. (Im Fall (1.16) wird dieser Vektor durch $\nu(t, x_+) = (1, 0)$ und $\nu(t, x_-) = (-1, 0)$ gegeben.)

Welche Art von Anfangs- und Randbedingungen zu einer eindeutigen Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung führt, hängt vom Typ der Gleichung ab. Zum Beispiel erhalten wir bei der Wellengleichung eine eindeutige Lösung, wenn wir sowohl die Funktion zum Anfangszeitpunkt als auch die Zeitableitung der Funktion zum Anfangszeitpunkt vorgeben. Die Funktion zum Anfangszeitpunkt alleine bestimmt die

¹⁷oder auf einem Teil des Randes von U

¹⁸oder auf einem Teil des Randes von U



Abbildung 1.1: Joseph Fourier, 1768–1830, französischer Mathematiker und Physiker.

zukünftige Zeitentwicklung in diesem Fall nicht. Das entspricht der Tatsache, dass es nicht reicht, ein Foto einer Welle zu sehen, um vorauszusagen, in welche Richtung die Welle sich bewegen wird. Im räumlich eindimensionalen Fall zum Beispiel ist unklar, ob sich die Welle nach links oder nach rechts bewegen wird.

Aus den hier genannten Gründen werden wir in den folgenden Abschnitten oft Anfangs- und Randbedingungen zu einem Problem vorgeben.

1.4 Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Anwendung auf Wärmeleitungsgleichung

Trennung der Variablen

Trennung der Variablen, auch Fourier-Methode genannt, ist eine Methode zum Lösen einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\text{Summe von Termen} = 0,$$

wobei in jedem Term nur Ableitungen (auch höherer Ordnung) nach einer Variable vorkommen. Beispiele für solche Gleichungen sind die Laplacegleichung, Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung. (Überprüfen Sie das!) Die Methode ist nach Joseph Fourier benannt, siehe Abbildung 1.1. Sie beruht auf dem Ansatz, dass die gesuchte Funktion eine bestimmte Kombination von Funktionen einer einzelnen Variablen ist. Die Kombination kann zum Beispiel die Summe oder das Produkt sein. Der Produktansatz ist zum Beispiel gegeben durch

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdots u_n(x_n),$$

wobei x_1, \dots, x_n die Standardkoordinaten in \mathbb{R}^n bezeichnen. Die Methode der Trennung der Variablen besteht aus den folgenden Schritten:

- (i) Setze den Kombinationsansatz für die gesuchte Funktion u in die PDG ein. Dadurch erhalten wir gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen der einzelnen Variablen.
- (ii) Löse diese GDG und fülle die gefundenen Lösungen der GDG in den Ansatz für u ein.
- (iii) Prüfe nach, ob die gefundene Funktion u die PDG tatsächlich löst.

Im nächsten Unterabschnitt illustrieren wir diese Methode, indem wir damit eine von Parametern abhängige Lösung der räumlich eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung (WLG)

$$u_t = au_{xx} \tag{1.17}$$

finden. (Diese PDG beschreibt die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem Stab.) Mittels dieser Lösung lösen wir anschliessend ein bestimmtes Anfangs- und Randwertproblem für die WLG. Zur Vereinfachung wählen wir unsere physikalischen Einheiten so, dass gilt:

$$a = 1.$$

Anwendung der Trennung der Variablen auf die Wärmeleitungsgleichung

Methode der Trennung der Variablen, Produktansatz:

Schritt (i), Einsetzen des Ansatzes: Wir nehmen an, dass u eine Lösung der WLG (1.17) (mit $a = 1$) ist, für die es zwei Funktionen $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $X : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt¹⁹, sodass u durch das Produkt

$$u(t, x) = T(t)X(x) \tag{1.18}$$

gegeben ist. Wir setzen diesen Ansatz in die WLG (1.17) (mit $a = 1$) ein und erhalten

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X''(x), \quad \forall t \in [0, \infty), x \in [0, \pi]. \tag{1.19}$$

Schritt (ii), entstandene GDG lösen:

Fall $T \equiv 0$ oder $X \equiv 0$: Dann ist wegen (1.18) auch

$$u \equiv 0. \tag{1.20}$$

¹⁹Wir nehmen an, dass die Funktion T stetig differenzierbar und die Funktion X zweimal stetig differenzierbar ist.

Fall $T \neq 0$ und $X \neq 0$: Wir wählen ein $x_0 \in [0, \pi]$, sodass $X(x_0) \neq 0$, und definieren

$$\lambda := \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

(Wir dürfen durch $X(x_0)$ teilen, da $X(x_0) \neq 0$.) Aus (1.19) mit $x = x_0$ folgt, dass

$$\dot{T}(t) = \lambda T(t), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für T . Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$T(t) = ce^{\lambda t} \quad \forall t, \quad (1.22)$$

wobei c eine Konstante ist. Da $T \neq 0$, gibt es ein $t_0 \in [0, \infty)$, sodass $T(t_0) \neq 0$. Aus (1.19, 1.21) folgt, dass

$$\frac{\dot{T}(t_0)}{T(t_0)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \lambda.$$

(Wir dürfen auf der linken Seite durch $T(t_0)$ teilen, da $T(t_0) \neq 0$.) Aus (1.19) mit $t = t_0$ folgt daher, dass

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad \forall x. \quad (1.23)$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für X .

Fall $\lambda \neq 0$: Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG (1.23) dann gegeben durch

$$X(x) = c_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + c_- e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad \forall x, \quad (1.24)$$

wobei $c_{\pm} \in \mathbb{C}$ ²⁰ Konstanten sind. (Hierbei haben wir gebraucht, dass $\lambda \neq 0$.) Indem wir (1.22, 1.24) in den Produktansatz (1.18) einsetzen, erhalten wir

$$u(t, x) = T(t)X(x) = e^{\lambda t} \left(C_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}x} \right), \quad (1.25)$$

wobei $C_{\pm} := cc_{\pm}$.

Fall $\lambda > 0$: Da wir annehmen, dass T und X reelle Werte annehmen, nimmt u wegen (1.18) ebenfalls reelle Werte an. Indem wir diese Bedingung in (1.25) einsetzen, erhalten wir, dass

$$C_{\pm} \in \mathbb{R}.$$

Fall $\lambda < 0$: Dann ist $\sqrt{\lambda}$ eine imaginäre Zahl. Da u reelle Werte annimmt, folgt aus (1.25), dass

$$C_- = \overline{C_+}.$$

²⁰Wir bezeichnen mit \mathbb{C} die Menge der komplexen Zahlen.

Fall $\lambda = 0$: Dann folgt aus (1.23), dass

$$X'' \equiv 0.$$

Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, folgt hieraus, dass es Konstanten c_0, c_1 gibt, sodass $X(x) = c_1x + c_0$. Indem wir das zusammen mit (1.22) in den Produktansatz (1.18) einsetzen, erhalten wir

$$u(t, x) = e^{0 \cdot t}(C_1x + C_0) = C_1x + C_0, \quad C_1 := cc_1, C_0 := cc_0. \quad (1.26)$$

Zusammenfassend erhalten wir: Wenn u die WLГ (1.17) (mit $a = 1$) löst und ein Produkt der Form (1.18) ist, dann ist u gegeben durch (1.25) mit $\lambda \neq 0$, oder durch (1.26), wobei C_{\pm}, C_1, C_0 Konstanten sind.

Schritt (iii), nachprüfen, ob die gefundene Funktion u die WLГ löst: (1.20): Die Nullfunktion $u \equiv 0$ löst die WLГ.

(1.25): Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \lambda e^{\lambda t}, \\ \frac{d}{dx}e^{\sqrt{\lambda}x} &= \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x}, \\ \text{darum } \frac{d^2}{dx^2}e^{\sqrt{\lambda}x} &= (\sqrt{\lambda})^2 e^{\sqrt{\lambda}x}. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-\sqrt{\lambda}x} = (-\sqrt{\lambda})^2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Für die Funktion u , gegeben durch (1.25), folgt, dass

$$u_t = \lambda u = u_{xx},$$

d. h., u löst die WLГ (1.17) (mit $a = 1$). Eine weitere Rechnung zeigt, dass die Funktion (1.26) die WLГ ebenfalls löst. Also lösen alle gefundenen Funktionen tatsächlich die WLГ. Zusammenfassend haben wir mittels der Methode der Trennung der Variablen das Folgende gezeigt.

Proposition 1.9 (Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung). *Die reellwertigen Lösungen u der räumlich eindimensionalen WLГ*

$$u_t = u_{xx},$$

die als ein Produkt der Form

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

geschrieben werden können²¹, sind genau die Funktionen

$$u(t, x) = e^{\lambda t} \left(C_+ e^{\sqrt{\lambda} x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda} x} \right), \quad (1.27)$$

wobei

$$\lambda \in (0, \infty), C_{\pm} \in \mathbb{R} \text{ oder } \lambda \in (-\infty, 0), C_{\pm} \in \mathbb{C}, \text{ sodass } C_- = \overline{C_+},$$

sowie die Funktionen

$$u(t, x) = C_1 x + C_0, \quad C_0, C_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Bemerkungen. [Trennung der Variablen]

- Bei der Trennung der Variablen verwenden wir die heuristische Methode eines Ansatzes. Wir nehmen dabei an, dass die Lösung unseres Problems eine bestimmte Form hat. (In unserem Fall ist die Form ein Produkt.) Ein Grund, warum dieser Ansatz zum Ziel geführt hat, ist, dass wir dadurch die Möglichkeiten eingeschränkt haben. (Bei weniger Möglichkeiten ist es einfacher, die Lösung zu finden.) Ein anderer Grund ist, dass wir damit das Problem auf ein einfacheres Problem reduziert haben, nämlich von einer PDG auf eine GDG.
- Die mit Trennung der Variablen gefundene Lösung ist meistens nicht die allgemeine Lösung. Das ist im Beispiel der Wärmeleitungsgleichung der Fall, da wegen des Superpositionsprinzips auch lineare Kombinationen der gefundenen Lösungen die WLG lösen.
- Die Methode liefert nicht immer eine Lösung.
- In Analysis 1 haben Sie eine Methode zur Lösung einer *gewöhnlichen* DG kennengelernt, die ebenfalls den Namen *Trennung der Variablen* trägt. Damit können wir eine GDG der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

lösen, indem wir alle Terme, die x enthalten, nach rechts bringen und alle Terme, die y enthalten, nach links bringen und danach integrieren. Diese Methode ist der hier geschilderten Methode ähnlich, aber nicht identisch, da wir hier *unabhängige* Variablen voneinander trennen, um aus einer PDG eine GDG zu erhalten, während bei der Methode aus Analysis 1 eine GDG gelöst wird, indem die *unabhängige* von der *abhängigen* Variablen getrennt wird.

²¹Hierbei nehmen wir an, dass T stetig differenzierbar und X zweimal stetig differenzierbar ist.

Lösen eines Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten nun das folgende Anfangs- und Randwertproblem für die WLK:

$$u_t = u_{xx}, \quad (1.29)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (1.30)$$

$$u(t = 0, x) = u_0(x) := 3 \sin(x) - \sin(2x), \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (1.31)$$

Wie im Abschnitt 1.3 erklärt, beschreibt dieses Anfangs- und Randwertproblem die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung u in einem Metallstab, dessen Endpunkte bei $x_- = 0$ und $x_+ = \pi$ liegen und durch Eiswasser konstant auf 0°C gekühlt werden, wobei der Stab durch punktuell Erhitzen so präpariert wird, dass seine Temperaturverteilung zum Beginnzeitpunkt $t = 0$ durch die Funktion u_0 gegeben ist.

Zur Lösung des Problems machen wir den Ansatz, dass u durch eine lineare Kombination von (reellwertigen) Produktfunktionen ist, welche die WLK (1.29) und die Randbedingung (1.30) lösen. Sei nun u zunächst eine Produktlösung der WLK (1.29). Gemäss Proposition 1.9 aus dem letzten Unterabschnitt ist u dann durch (1.27) oder (1.28) gegeben. (Die Funktion $u \equiv 0$ hat jede dieser zwei Formen.)

Fall (1.27) ($u(t, x) = e^{\lambda t} (C_+ e^{\sqrt{\lambda} x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda} x})$): Die Randbedingungen (1.30) implizieren, dass

$$C_+ + C_- = u(0, 0) = 0, \quad (1.32)$$

$$C_+ e^{\sqrt{\lambda} \pi} + C_- e^{-\sqrt{\lambda} \pi} = u(0, \pi) = 0. \quad (1.33)$$

Bedingung (1.32) ergibt

$$C_- = -C_+. \quad (1.34)$$

Indem wir das in (1.33) einsetzen und mit $e^{\sqrt{\lambda} \pi}$ multiplizieren, erhalten wir

$$C_+ (e^{2\pi\sqrt{\lambda}} - 1) = 0. \quad (1.35)$$

Wegen der Anfangsbedingung (1.31) ist $C_+ \neq 0$. Aus (1.35) folgt daher, dass

$$e^{2\pi\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Hieraus folgt, dass es eine ganze Zahl k gibt, sodass

$$\sqrt{\lambda} = ki.$$

(Wir haben daher $\lambda \leq 0$.) Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(t, x) &= C_+ e^{-k^2 t} (e^{ikx} - e^{-ikx}) && \text{(wegen (1.27,1.34))} \\ &= C u^{(k)}(t, x), \\ u^{(k)}(t, x) &:= e^{-k^2 t} \sin(kx), && C := 2iC_+ \end{aligned} \tag{1.36}$$

(wegen der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$).

Fall (1.28) ($u(t, x) = C_1 x + C_0$): Dann folgt aus den Randbedingungen (1.30), dass $C_0 = 0$ und $C_1 = 0$, also, dass $u \equiv 0$.

Die Funktion $u^{(k)}$ (gegeben durch (1.36)) löst tatsächlich die Randbedingungen (1.30). Für $t = 0$ ist sie gegeben durch

$$u^{(k)}(0, x) = \sin(kx).$$

Indem wir das mit der Funktion u_0 aus (1.31) vergleichen, sehen wir, dass die Funktion

$$u := 3u^{(1)} - u^{(2)}$$

die Anfangsbedingung (1.31) löst. Die WLK (1.29) ist linear und homogen, und u ist eine (endliche) Linearkombination der Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}$ der WLK. Wegen des Superpositionsprinzips (Proposition 1.2) löst daher u auch die WLK. Da u eine lineare Kombination von Lösungen der Randbedingungen (1.30) ist und diese Randbedingungen homogen sind, löst u diese Bedingungen ebenfalls. Zusammenfassend ist u also eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung (1.29,1.30,1.31), wie gewünscht.

Bemerkung. Die obige Lösung unseres Anfangs- und Randwertproblems ist eine endliche Linearkombination der Funktionen $u^{(k)}$. Später werden wir sehen, dass auch gewisse *unendliche* Linearkombinationen der Funktionen $u^{(k)}$ (gegeben durch (1.36)) sinnvoll sind. Mittels Fouriertheorie kann die allgemeine Lösung der WLK als eine solche unendliche Linearkombination geschrieben werden. Das kann man verwenden, um eine Lösung der WLK mit homogenen Randbedingungen und *beliebigen* Anfangsbedingungen zu finden.

Kapitel 2

Wellengleichung, Druckwellen, d'Alembertsche Formel für die Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung

Druckwellen (insbesondere Schallwellen) in einem Festkörper, einer Flüssigkeit oder einem Gas erfüllen die Wellengleichung. Wir leiten das für ebene Wellen in einem Kristallgitter aus dem zweiten Gesetz von Newton her. In diesem Fall erhalten wir die 1-dimensionale Wellengleichung. Die d'Alembert-Formel beschreibt die Lösung dieser Gleichung, die Anfangsbedingungen an die gesuchte Funktion und ihre Zeitableitung erfüllt.

2.1 Herleitung der Wellengleichung für eine ebene Druckwelle in einem Kristallgitter

Wir betrachten ein Kristallgitter, das aus Teilchen (Atomen oder Molekülen) besteht. Siehe die Abbildung 2.1. Die Teilchen sind also auf regelmässige Weise angeordnet. Wir nehmen an, dass das Gitter kubisch primitiv ist. Das bedeutet, dass die Teilchen sich im Falle des Gleichgewichtszustandes in den Punkten $(i_1, i_2, i_3)d = (i_1d, i_2d, i_3d)$ befinden, wobei i_1, i_2, i_3 ganze Zahlen sind und $d > 0$ eine Konstante ist.^{1 2} (d ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilchen, die sich auf einer Geraden befinden,

¹Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, dass die Teilchen Punktteilchen sind. Des Weiteren vernachlässigen wir die thermische Bewegung der Teilchen. Wir nehmen also an, dass die Teilchen im Gleichgewichtszustand in Ruhe sind.

²Ein Beispiel für ein kubisch primitives Gitter ist Pyrit.

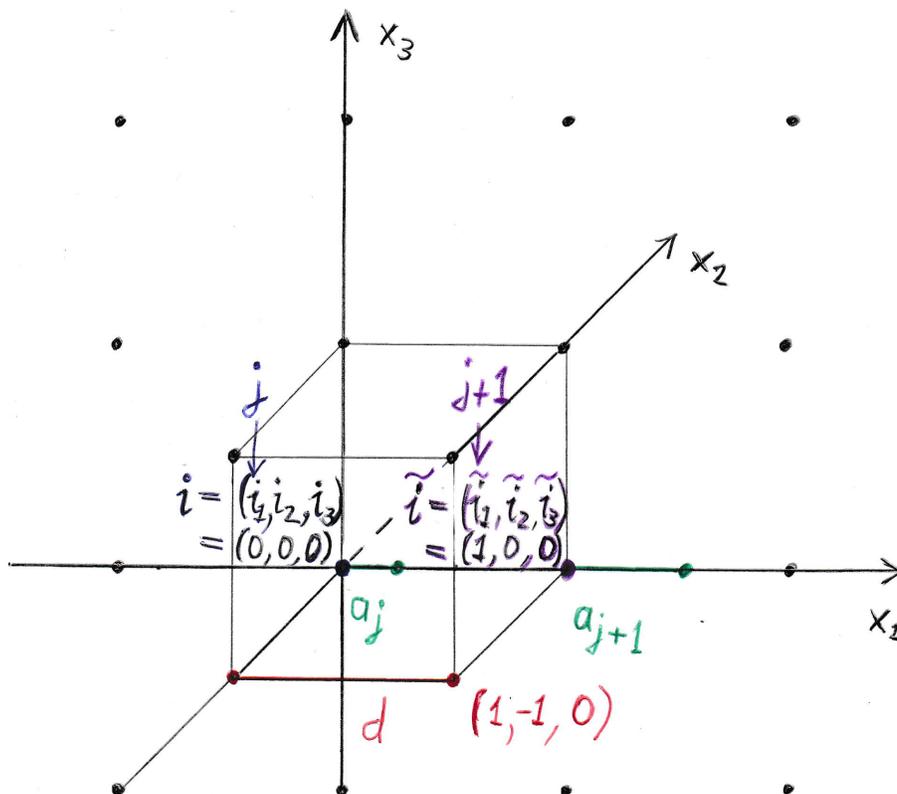


Abbildung 2.1: Kristallgitter.

die parallel zu einer Koordinatenachse ist.) Zum Beispiel befinden sich Teilchen in den Punkten

$$(0, 0, 0)d = (0, 0, 0), \quad (1, 0, 0)d = (d, 0, 0), \quad (1, -1, 2)d.$$

Wir betrachten eine longitudinale³ ebene Druckwelle, die sich in x_1 -Richtung ausbreitet. Die Druckverteilung hängt also nur von der x_1 -Koordinate ab. Wir schreiben:

$p(t, x_1) :=$ (mechanische) Spannung (= Druck) in x_1 -Richtung zum Zeitpunkt t am Ort $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Im Folgenden zeigen wir, dass die Funktion p die 1-dimensionale Wellengleichung

$$p_{tt} = c^2 p_{x_1 x_1} \tag{2.1}$$

erfüllt, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit c wie folgt gegeben ist. Wir schreiben

$\rho :=$ Massendichte des Kristallgitters

³Longitudinal bedeutet, dass die Auslenkung der Teilchen in der Ausbreitungsrichtung erfolgt. Eine longitudinale Welle heisst auch *Längswelle*.

ρ_0 := Massendichte im Gleichgewichtszustand

Wir fassen die Spannung p als eine Funktion von ρ auf. (Wir können ρ durch Zusammenpressen in x_1 -Richtung verändern und dadurch eine Spannung erzeugen.) Es gilt dann

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}. \quad (2.2)$$

Bemerkungen. • Das bedeutet, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit umso grösser ist, je härter das Material ist, weil dann die Spannung p schnell zunimmt, wenn wir die Dichte durch Zusammenpressen erhöhen.

- Dieser Zusammenhang ist intuitiv plausibel.
- Die Dichteänderung beim Zusammenpressen ist in der Praxis minim, aber sie spielt hier eine Rolle.

Um die Wellengleichung (2.1) herzuleiten, schreiben wir:

$$\begin{aligned} a_j(t) &:= x_1\text{-Auslenkung des Teilchens } i = (i_1 = j, i_2, i_3) \text{ zur Zeit } t \\ &\quad \text{(aus der Gleichgewichtslage)} \\ &= \left(x_1\text{-Koordinate dieses Teilchens zur Zeit } t \right) - jd. \end{aligned}$$

Siehe die Abbildung 2.1.

(Im Gleichgewichtsfall haben wir also $a_j = 0$ für alle $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$) Wir nehmen das Folgende an:

- (i) Ein Teilchen i erfährt nur Kräfte von den Teilchen in seiner eigenen (x_2, x_3) -Ebene und in den direkt links und rechts daneben liegenden (x_2, x_3) -Ebenen. (Das ist eine sinnvolle Näherung.)
- (ii) Die Kraft, die ein Teilchen i' auf i ausübt, ist zentral, d. h., sie zeigt in Richtung des Verbindungsvektors zwischen i und i' .
- (iii) Die Kräfte hängen linear von der Auslenkung des Systems aus der Ruhelage ab. (Diese Annahme ist sinnvoll, da die Auslenkungen klein sind und wir daher mit den linearisierten Kräften arbeiten können.)

Aus Symmetriegründen heben sich die x_2 -Komponenten aller Kräfte, die auf das Teilchen i wirken, auf. Dasselbe gilt für die x_3 -Komponenten. Aus den obigen Annahmen

folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_j &:= x_1\text{-Komponente der totalen Kraft auf Teilchen } i = (i_1 = j, i_2, i_3) \\ &= k(a_{j+1} - a_j) - k(a_j - a_{j-1}).\end{aligned}\quad (2.3)$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist. (Wir können uns k als die totale Federkonstante vorstellen, die den Kräften zwischen i und allen benachbarten Teilchen entspricht.) Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir

$$x := x_1.$$

Der Gleichgewichtsabstand d ist sehr klein (Grössenordnung $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$). Daher können wir die Teilchenauslenkung als eine Funktion der x -Koordinate (und der Zeit) auffassen. Wir schreiben dafür

$$a(t, x). \quad (2.4)$$

Wir haben

$$a(t, jd) = a_j(t).$$

(Ursprünglich ist $a(t, x)$ nur für $x = jd$ definiert. Wir ersetzen diese Funktion einer diskreten Variablen jetzt also durch eine Funktion einer kontinuierlichen Variablen.) Gemäss der Definition der Ableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten können wir nähern:

$$\begin{aligned}a_x(t, x = jd) &\approx \frac{a_{j+1} - a_j}{d}, \\ a_{xx}(t, jd) &\approx \frac{a_x(t, jd) - a_x(t, (j-1)d)}{d} \approx \frac{a_{j+1} - a_j - (a_j - a_{j-1})}{d^2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Wir schreiben

$m :=$ Masse eines Teilchens

Wir haben

$$\begin{aligned}ma_{tt}(t, jd) &= m\ddot{a}_j \\ &= \mathbf{F}_j \quad (\text{wegen des zweiten Gesetzes von Newton}) \\ &\approx kd^2 a_{xx}(t, jd) \quad (\text{wegen (2.3,2.5)}).\end{aligned}$$

Im Limes $d \rightarrow 0$ ⁴ erhalten wir also

$$a_{tt}(t, x) = c^2 a_{xx}(t, x), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

$$c := \sqrt{\frac{kd^2}{m}}. \quad (2.7)$$

⁴Wir lassen hier gleichzeitig d gegen 0 und j so gegen unendlich gehen, dass $x = jd$ konstant bleibt.

Die Auslenkung der Teilchen aus der Gleichgewichtslage erfüllt also die Wellengleichung. Wir zeigen jetzt, dass dasselbe für die Spannung p gilt: Dazu fixieren wir $j \in \mathbb{Z}$ und betrachten die zum Teilchen $(j, 0, 0)$ gehörende (*primitive*) *Elementarzelle*. Das ist der Würfel, der die Ecken

$$(j, 0, 0), \quad (j + 1, 0, 0), \quad (j, 1, 0), \quad (j, 0, 1)$$

enthält. Der Würfel in Abbildung 2.1 ist diese Elementarzelle, um $-d$ in x_2 -Richtung verschoben. p , die mechanische Spannung (=Druck) in x_1 -Richtung ist die Kraft pro Fläche, die von rechts auf ein Flächenstück wirkt, das parallel zur (x_2, x_3) -Ebene ist. Da es ein Teilchen pro Elementarzelle gibt, ist die Spannung gegeben durch

$$\begin{aligned} p(t, x = jd) &= \frac{\text{Kraft auf Teilchen } (j, 0, 0) \text{ von rechts}}{\text{rechte Seitenfläche der Elementarzelle}} \\ &\approx k(a_{j+1} - a_j) \\ &= C \frac{a_{j+1} - a_j}{d} \\ &= C \frac{a(t, (j+1)d) - a(t, jd)}{d}, \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad C := \frac{k}{d}. \quad (2.8)$$

Indem wir den Abstand d gegen 0 gehen lassen, dann erhalten wir hieraus

$$p(t, x) = C a_x(t, x), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} p_{tt} &= C(a_x)_{tt} \\ &= C(a_{tt})_x \\ &= Cc^2 a_{xxx} \quad (\text{wegen (2.6)}) \\ &= c^2 p_{xx}. \end{aligned}$$

D. h. , p erfüllt ebenfalls die Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Um c zu berechnen, schauen wir, was passiert, wenn wir die rechte Seitenfläche einer Elementarzelle um Δx in x_1 -Richtung auslenken. (Der Würfel in Abbildung 2.1 ist eine Elementarzelle dar.) Wir schreiben

$$V := \text{Volumen der Elementarzelle} = d^3$$

$$\Delta V := (\text{Zuwachs dieses Volumens bei Auslenkung um } \Delta x) = d^2 \Delta x$$

$$\rho_0 := \text{Massendichte im Gleichgewichtszustand} = \frac{m}{V} = \frac{m}{d^3}$$

$\Delta\rho :=$ Veränderung der Dichte bei Auslenkung um Δx

$\Delta p :=$ (Veränderung der) Spannung bei Auslenkung um Δx

Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_0 + \Delta\rho &= \frac{m}{V + \Delta V} \\ &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{\Delta V}{V}} \\ &\approx \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right) \\ &= \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{d}\right) \\ &= \rho_0 - \frac{\rho_0}{d} \Delta x \end{aligned}$$

und darum

$$\Delta\rho \approx -\frac{\rho_0}{d} \Delta x. \quad (2.10)$$

Andererseits gilt

$$\Delta p = -\frac{\text{totale Zugkraft von rechts auf ein Teilchen bei Auslenkung um } \Delta x}{\text{Seitenfläche des Würfels}} = -\frac{k\Delta x}{d^2}.$$

Indem wir das mit (2.10) kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta\rho} &\approx \frac{k\Delta x}{d^2} \frac{d}{\rho_0\Delta x} \\ &= \frac{kd^2}{m} \\ &= c^2 \quad (\text{wegen (2.7)}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Auslenkung Δx ist im Vergleich mit d sehr klein. Daher können wir näherungsweise Δx und darum $\Delta\rho$ gegen 0 gehen lassen. Dabei wird (2.11) zur Gleichheit

$$\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) = c^2.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle ist also durch

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}$$

gegeben, wie in (2.7) behauptet.

Bemerkung. [Wellengleichung für Druckwelle]

- In dieser Herleitung der Wellengleichung für eine Druckwelle haben wir mathematisches Modell eines Teiles der physikalischen Realität erstellt. Dazu haben wir die Realität *idealisiert*, zum Beispiel durch folgende Vereinfachungen:
 - Die betrachteten Teilchen sind Punktteilchen.
 - Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist klassisch mechanisch.
 - Die Wechselwirkung ist nicht relativistisch. (Die verwendete Form des zweiten Newtonschen Gesetzes ist nicht relativistisch.)
 - Wir nehmen an, dass die Teilchen im Gleichgewichtszustand in Ruhe sind.
 - Wir haben den Abstand d zwischen zwei benachbarten Teilchen gegen 0 gehen lassen.
 - Wir haben den Verhältnis $\frac{\Delta x}{d}$ gegen 0 gehen lassen. ($\Delta x :=$ Auslenkung eines Teilchens aus der Gleichgewichtslage)

Die Annahmen (i,ii,iii) auf S. 41 sind ebenfalls Vereinfachungen. Dieser Prozess der Idealisierung ist typisch für die Modellbildung.

- Dass wir den Abstand d und das Verhältnis $\frac{\Delta x}{d}$ gegen 0 gehen lassen, führt dazu, dass unser Modell Ableitungen physikalischer Grössen enthält. Wir erhalten auf diese Weise nämlich räumliche Ableitungen der Auslenkung a und der mechanischen Spannung p .

2.2 Allgemeine Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung

Sei $n = 1$ und $c > 0$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die räumlich 1-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (2.12)$$

Der folgende Satz gibt eine Formel für die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Satz 2.1 (allgemeine Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung). *Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ löst die PDG (2.12) genau dann, wenn es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $v_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$u(t, x) = v_+(x + ct) + v_-(x - ct), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Beweis: S. 47

Seien $v_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Wir definieren

$$u^{\pm}(t, x) := v_{\pm}(x \pm ct). \quad (2.14)$$

Für eine feste Zeit t ist $u^+(t, \cdot) = v_+(\cdot + ct)$ ⁵ die um ct nach links (in negative x -Richtung) verschobene Funktion v_+ . Das bedeutet, dass die Funktion u_+ eine mit Geschwindigkeit c nach links laufende Welle darstellt. Mit einer *Welle* meinen wir dabei eine Funktion des Ortes, die sich in eine Richtung fortbewegt. Analog stellt die Funktion u^- eine mit Geschwindigkeit c nach rechts (in positive x -Richtung) laufende Welle dar.

Wir nennen eine nach links (rechts) laufende Welle eine Rückwärtswelle (Vorwärtswelle). Gemäss Satz 2.1 ist die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung also durch die Summe einer Rückwärtswelle und einer Vorwärtswelle. Das rechtfertigt den Namen *Wellengleichung*. Der Satz beschreibt die Lösungen der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension vollständig.

Beispiel. Wir definieren

$$\begin{aligned} v_+(y) &:= \cos(y), & v_-(y) &:= -\cos(y), \\ u(t, x) &:= v_+(x + ct) + v_-(x - ct) = \cos(x + ct) - \cos(x - ct). \end{aligned}$$

Die Funktion u ist die Überlagerung von nach rechts und links laufenden Kosinuswellen. Der Additionssatz für den Kosinus besagt

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

(Dieser Satz folgt aus der Eulerschen Formel.) Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Funktion u wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \cos x \cos(ct) - \sin x \sin(ct) - \cos x \cos(-ct) + \sin x \sin(-ct) \\ &= -2 \sin(ct) \sin x. \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist u also ein Produkt einer Funktion der Zeit und einer Funktion des Ortes, d. h. eine *stehende Welle*. Zu den Zeitpunkten $t = \frac{1}{c}(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, ist $\sin(ct) = \pm 1$ und daher der Betrag der Amplitude der stehenden Welle in jedem Punkt zeitlich maximal. Die Vorwärtswelle und die Rückwärtswelle interferieren dann *konstruktiv*. Zu den Zeitpunkten $t = \frac{k\pi}{c}$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, ist $\sin(ct) = 0$ und daher der Betrag der Amplitude der stehenden Welle in jedem Punkt zeitlich minimal. Die Vorwärtswelle und die Rückwärtswelle interferieren dann *destruktiv*.

⁵Damit meinen wir die Funktion $x \mapsto u^+(t, x)$.

Bemerkung. Stehende Wellen treten bei Schwingungen einer Saite auf, deren Enden festgehalten werden. (Eine eingespannte Saite erfüllt die Wellengleichung. Siehe Übungsserie 3.)

Beweis des Satzes 2.1: Beweis der Implikation “ u löst (2.12) \iff es gibt $v_{\pm} \dots$ ”: Wir nehmen an, dass es solche Funktionen v_{\pm} gibt. Wir definieren u^{\pm} wie in (2.14). Wir haben

$$\begin{aligned} u_t^+(t, x) &= v'_+(x + ct)c, & \text{also } u_{tt}^+(t, x) &= v''_+(x + ct)c^2, \\ u_x^+(t, x) &= v'_+(x + ct) \cdot 1, & \text{also } u_{xx}^+(t, x) &= v''_+(x + ct) \cdot 1^2, \\ & & \text{und darum } u_{tt}^+ &= c^2 u_{xx}^+, \end{aligned}$$

d. h., u^+ löst die Wellengleichung (2.12). Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$u_{tt}^-(t, x) = (-c)^2 u_{xx}^-(t, x),$$

d. h., u^- löst die Wellengleichung (2.12). Wegen des Superpositionsprinzips löst daher die Funktion $u = u^+ + u^-$ ebenfalls die Wellengleichung (2.12). Das beweist die Implikation “ u löst (2.12) \iff es gibt $v_{\pm} \dots$ ”.

Die umgekehrte Implikation “ u löst (2.12) \implies es gibt $v_{\pm} \dots$ ” haben wir in Übungsserie 2 bewiesen. Dabei haben wir die Tatsache verwendet, dass die Wellengleichung unter der Koordinatentransformation

$$(x_1, x_2) := \psi(t, x) := \frac{1}{2}(x + ct, x - ct)$$

in die Gleichung

$$w_{x_1 x_2} = 0$$

für eine Funktion w überführt wird. (In Übungsserie 2 wird die Variablentransformation $\varphi = \psi^{-1}$ betrachtet.)

Das beweist den Satz 2.1. \square

Bemerkung. Um die Implikation “ u löst (2.12) \implies es gibt $v_{\pm} \dots$ ” zu beweisen, nehmen wir an, dass u die Wellengleichung löst und leiten daraus Bedingungen an u her, die uns schliesslich auf die Formel (2.13) führen. Diese Implikation entspricht also einer Herleitung der Lösungsformel. Das ist analog zur Herleitung der Formeln (1.27, 1.28) für die Produktlösungen der Wärmeleitungsgleichung. (Siehe Proposition 1.9 in Abschnitt 1.4.)

2.3 d'Alembertsche Formel für die Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung

Wir fixieren zwei Funktionen $u_0, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und betrachten die 1-dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$u(t = 0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

$$u_t(t = 0, x) = v_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Wir nennen die PDG (2.15) zusammen mit den Bedingungen (2.16,2.17) ein *Anfangswertproblem* oder *Cauchy-Problem*. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, beschreibt die PDG (2.15) zum Beispiel ebene Druckwellen in einem Kristallgitter. In diesem Beispiel legt die Anfangsbedingung (2.16) die Spannungsverteilung (=Druckverteilung) zum Zeitpunkt $t = 0$ fest. Die Anfangsbedingung (2.17) legt die zeitliche Ableitung des Drucks zum Zeitpunkt $t = 0$ fest.

D'Alembertsche Formel

Das Anfangswertproblem (2.15,2.16,2.17) hat eine eindeutige Lösung, die durch die d'Alembertsche Formel gegeben ist:

Satz 2.2 (Lösung des Anfangswertproblems für die räumlich 1-dimensionale Wellengleichung, d'Alembertsche Formel). *Wir nehmen an, dass u_0 zweimal stetig differenzierbar ist⁶ und dass v_0 stetig differenzierbar ist. Die folgenden Aussagen gelten:*

(i) *Die Funktion*

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) := \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy, \quad (2.18)$$

ist zweimal stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem für die Wellengleichung, (2.15,2.16,2.17).

(ii) *Diese Funktion ist die einzige zweimal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems.*

Beweis: S. 56

Dieser Satz ist nach Jean-Baptiste le Rond d'Alembert benannt, siehe Abbildung 2.2. Wir betrachten ein physikalisches System, das durch die eindimensionale Wellenglei-

⁶Das bedeutet, dass die zweiten partiellen Ableitungen von u_0 existieren und stetig sind.



Abbildung 2.2: Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783, französischer Mathematiker und Physiker.

chung beschrieben werden kann, zum Beispiel eine ebene Druckwelle oder elektromagnetische Welle. Der Satz 2.2 impliziert dann, dass die Zeitentwicklung des Systems vollständig durch die Anfangsbedingungen an die Funktion und ihre Zeitableitung festgelegt wird. Mit Hilfe dieses Satzes erreichen wir also folgendes Ziel der Physik für Phänomene, die als ebene Wellen beschrieben werden können:

Ziel. *Bestimme die zukünftige Entwicklung eines physikalischen Systems in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems.*

Ein System, für welches die zukünftige Entwicklung durch den gegenwärtigen Zustand bestimmt wird, heisst *deterministisch*. Der Satz 2.2 liefert also eine deterministische Beschreibung von ebenen Wellen.

Bemerkungen. • Für Wellen wird der gegenwärtige Zustand durch die Funktion zum Zeitpunkt $t = 0$ und ihre Ableitung zum Zeitpunkt $t = 0$ beschrieben.

- Das ist analog zum (eindimensionalen) Federschwinger, den wir in Analysis 2 behandelt haben. Dieser wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben. Der gegenwärtige Zustand des Systems wird durch Auslenkung des Federschwingers und seine Geschwindigkeit, also die Zeitableitung seiner Auslenkung beschrieben. Damit ist seine Zeitentwicklung festgelegt. Dass für Wellen und den Federschwinger der gegenwärtige Zustand durch analoge Daten (eine Grösse und ihre Zeitableitung) beschrieben wird, ist plausibel, da unser Modell für Druckwellen ein System von Teilchen in einem Kristallgitter ist, die wir als gekoppelte Federschwinger (ohne Dämpfung) auffassen können. (Siehe Abschnitt 2.1.)

Beispiel. [Lösung des Anfangswertproblems (AWP) für die 1-dimensionale Wellengleichung, d'Alembertsche Formel] Wir betrachten das AWP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (2.19)$$

$$u(t=0, x) = u_0(x) := \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

$$u_t(t=0, x) = v_0(x) := c \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Gemäss Satz 2.2 ist die eindeutige Lösung dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} c \cos(y) dy \\ &= \frac{\sin(x+ct) + \sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2} \sin(y) \Big|_{y=x-ct}^{y=x+ct} \\ &= \sin(x+ct). \end{aligned}$$

Wir prüfen nach, dass diese Funktion das AWP (2.19,2.20,2.21) tatsächlich löst: Gemäss der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \cos(x+ct)c, \quad \text{daher} \quad u_{tt}(t, x) = -\sin(x+ct)c^2, \\ u_x(t, x) &= \cos(x+ct) \cdot 1, \quad \text{daher} \quad u_{xx}(t, x) = -\sin(x+ct) \cdot 1 \cdot 1 \\ &\quad \text{und daher} \quad u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x). \end{aligned}$$

Also erfüllt u die Wellengleichung (2.19). Des Weiteren gilt

$$u(t=0, x) = \sin(x+c \cdot 0) = \sin(x), \quad u_t(t=0, x) = \cos(x+c \cdot 0)c = c \cos(x).$$

Also erfüllt u auch die Anfangsbedingungen (2.20,2.21).

Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet

Wir schreiben u für die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2.15,2.16,2.17) für die räumlich eindimensionale Wellengleichung. Sei $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren das *Abhängigkeitsgebiet des Punktes* (t, x) als die Menge aller Punkte x_0 , sodass $u(t, x)$ vom Wert einer der beiden Anfangsbedingungen im Punkt x_0 ⁷ abhängt.

Gemäss Satz 2.2 ist u durch die d'Alembertsche Formel (2.18) gegeben, also durch

$$u(t, x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy.$$

Die Funktion u_0 spielt dabei die Rolle der Anfangsbedingung für die Funktion u selbst. Die Funktion v_0 spielt die Rolle der Anfangsbedingung an die Zeitableitung von u . Aus

⁷d. h. von $u_0(x_0)$ oder von $v_0(x_0)$ (oder von beiden Werten)

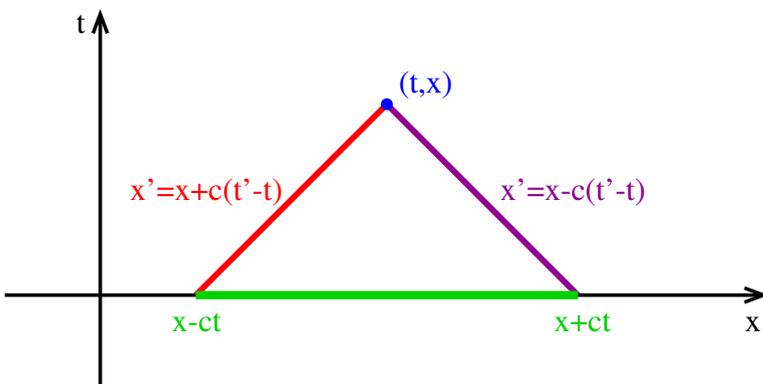


Abbildung 2.3: Grün: Abhängigkeitsgebiet des blauen Punktes (t, x) , das Intervall $[x - ct, x + ct]$.

der d'Alembertschen Formel folgt, dass der Wert der Funktion u an der Stelle (t, x) von der Anfangsbedingung u_0 in den Punkten $x + ct$ und $x - ct$ sowie der Anfangsbedingung v_0 auf dem Intervall

$$[x - ct, x + ct]$$

abhängt, nicht aber von den Werten von u_0 und v_0 ausserhalb dieses Intervalls. Das Abhängigkeitsgebiet von (t, x) ist daher durch das folgende Intervall gegeben:

$$\text{Abhängigkeitsgebiet von } (t, x) = [x - ct, x + ct].$$

Siehe Abbildung 2.3.

Bemerkung. [Geometrische Interpretation des Abhängigkeitsgebiets] Das Abhängigkeitsgebiet wird durch die unteren Endpunkte der roten und der violetten Strecke eingegrenzt wird, wobei:

rote Strecke = Weg des blauen Punktes, wenn wir der Vorwärtswelle in negativer Zeitrichtung bis zum Zeitpunkt 0 folgen = Menge aller Punkte (t', x') der Form

$$(t', x'), \quad \text{wobei } x' = x + c(t' - t), \quad 0 \leq t' \leq t.$$

violette Strecke = Weg des blauen Punktes, wenn wir der Rückwärtswelle in negativer Zeitrichtung bis zum Zeitpunkt 0 folgen = Menge aller Punkte der Form

$$(t', x'), \quad \text{wobei } x' = x - c(t' - t), \quad 0 \leq t' \leq t.$$

Siehe Abbildung 2.3.

Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes (t, x) gibt an, für welche Punkte x_0 die Anfangsdaten in x_0 einen Einfluss auf die Lösung der Wellengleichung im Punkt (t, x) haben. Wir stellen uns jetzt umgekehrt die folgende Frage:

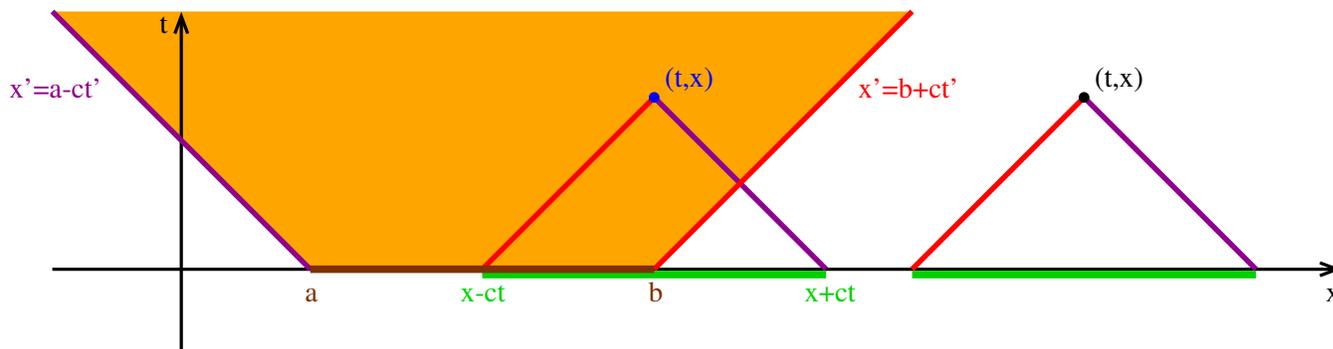


Abbildung 2.4: Oranges, sich nach oben unendlich ausdehnendes Trapez: Einflussgebiet des braunen Intervalls $[a, b]$. Der blaue Punkt (t, x) liegt in diesem Einflussgebiet. Sein grünes Abhängigkeitsgebiet schneidet das braune Intervall $[a, b]$. Der schwarze Punkt (t, x) liegt nicht im Einflussgebiet des braunen Intervalls $[a, b]$. Sein grünes Abhängigkeitsgebiet schneidet das braune Intervall $[a, b]$ nicht.

Frage. Für welche Punkte (t, x) in der Halbebene $t > 0$ beeinflussen die Anfangsdaten auf einem festen Intervall $[a, b]$ die Lösung der Wellengleichung im Punkt (t, x) ?

Diese Menge von Punkten heisst das *Einflussgebiet des Intervalls* $[a, b]$. Es enthält einen Punkt (t, x) genau dann, wenn das Abhängigkeitsgebiet von (t, x) das Intervall $[a, b]$ schneidet, also wenn $[x - ct, x + ct] \cap [a, b]$ nicht leer ist, das heisst

$$x + ct \geq a \quad \text{und} \quad x - ct \leq b.$$

Siehe Abbildung 2.4.

Daraus folgt, dass ein Signal, das zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an einem Ort x_0 ausgesendet wird, sich mit der Geschwindigkeit c nach links und rechts ausbreitet. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also endlich.

Wir betrachten jetzt den folgenden Fall.

Fall: Es gibt ein $u_\infty \in \mathbb{R}$, sodass die Anfangsdaten u_0 und v_0 die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$u_0 = u_\infty \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus [a, b], \tag{2.22}$$

$$v_0 = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus [a, b], \tag{2.23}$$

$$\int_a^b v_0(y) dy = 0. \tag{2.24}$$

Bemerkungen. • Die Bedingungen (2.22,2.23) entsprechen einem Anfangssignal, das im Gebiet $[a, b]$ lokalisiert ist.

- Diese Bedingungen sind physikalisch sinnvoll. Siehe Bemerkung 2.4.

Wir fixieren einen Punkt x . Die Lösung u des AWP's (2.15,2.16,2.17) nimmt in x nach einer gewissen Zeit dann den konstanten Wert u_∞ an. Um das zu präzisieren, definieren wir

$$t_x := \max \left\{ \frac{x-a}{c}, \frac{b-x}{c} \right\}.$$

Es gilt

$$u(t, x) = u_\infty, \quad \forall t > t_x. \quad (2.25)$$

Sei nämlich $t > t_x$. Dann ist $t > \frac{x-a}{c}$, d. h.

$$x - ct < a. \quad (2.26)$$

Des Weiteren ist $t > \frac{b-x}{c}$, d. h.

$$x + ct > b. \quad (2.27)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy \\ &\quad (\text{gemäß der d'Alembertschen Formel (2.18)}) \\ &= \frac{u_\infty + u_\infty}{2} + \frac{1}{2c} \int_a^b v_0(y) dy \quad (\text{wegen (2.26,2.27) und (2.22,2.23)}) \\ &= u_\infty \quad (\text{wegen (2.24)}). \end{aligned}$$

Das zeigt (2.25), wie behauptet.

Die Menge aller Punkte (t, x) , für welche $t > t_x$, bildet einen nach oben geöffneten Winkel, siehe die Abbildung 2.5. In diesem Winkel nimmt u also den konstanten Wert u_∞ an.

Wir können den hier betrachteten Fall wie folgt charakterisieren:

Proposition 2.3. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die Lösung des Anfangswertproblems (2.15,2.16,2.17) und $u_\infty \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen (2.22,2.23,2.24) sind genau dann erfüllt, wenn es Funktionen $v_\pm \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und Konstanten v_\pm^∞ gibt, sodass

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v_+(x+ct) + v_-(x-ct), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}, \\ v_\pm &= v_\pm^\infty \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus [a, b], \\ v_+^\infty + v_-^\infty &= u_\infty. \end{aligned}$$

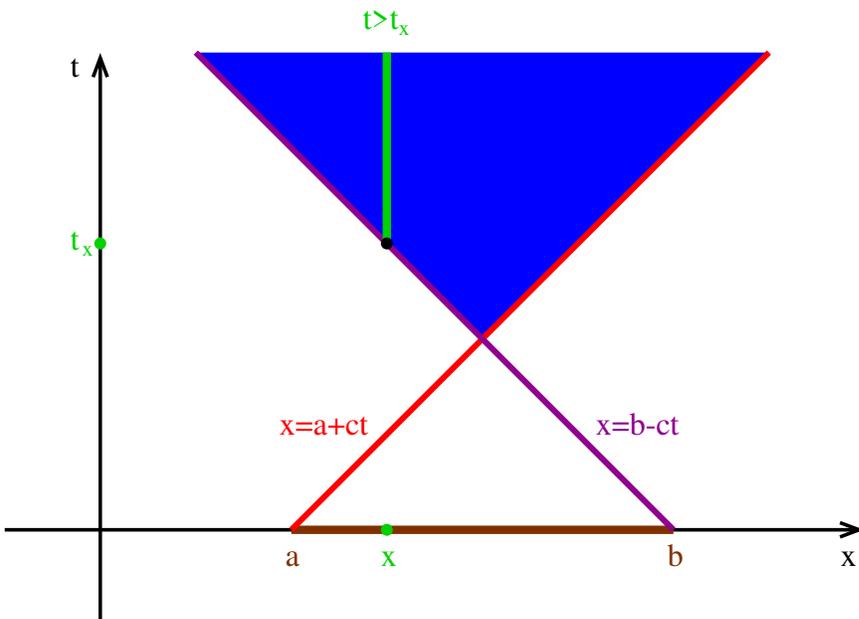


Abbildung 2.5: Grün: Menge aller Punkte (t, x) , für welche $t > t_x$, wobei wir x festhalten. Blau: Menge aller Punkte (t, x) , für welche $t > t_x$. (Hier variiert auch x .) Auf der blauen Menge nimmt u im betrachteten Fall den Wert u_∞ an.

Beweis: Die Implikation “ \Leftarrow ” folgt aus direkten Rechnungen, wobei wir für (2.24) den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwenden. Die Implikation “ \Rightarrow ” kann mit Hilfe von Satz 2.1 bewiesen werden. \square

Proposition 2.3 besagt, dass u die Summe einer Rückwärts- und einer Vorwärtswelle ist, die zum Zeitpunkt $t = 0$ im Gebiet $[a, b]$ lokalisiert ist. (Ausserhalb dieses Gebietes ist die Welle konstant.) Die Bedingung $t > t_x$ besagt, dass diese beiden Wellen die Stelle x passiert haben. Es ist daher anschaulich klar, dass $u(t, x) = u_\infty$ für $t > t_x$. Siehe Abbildung 2.6⁸.

Bemerkung 2.4. [physikalische Relevanz der Bedingungen an die Anfangsdaten, ebene Druckwelle] Die Bedingungen (2.22, 2.23, 2.24) für u_0, v_0 sind physikalisch sinnvoll. Um das zu sehen, betrachten wir die mechanische Spannung $u = p$ einer ebenen Druckwelle in einem Kristallgitter. (Siehe Abschnitt (2.1).) Wir schreiben $A(t, x) := a(t, x)$

⁸Die hier abgebildete Funktion u_0 ist nicht stetig, da sie in den Punkten $x = a$ und $x = b$ Sprünge aufweist. Die Funktion u ist daher nicht partiell differenzierbar. Die d’Alembertsche Formel liefert trotzdem eine Funktion, die die Wellengleichung in einem schwachen Sinn löst (im Sinne der Distributionen). Das Wort *schwach* wird in diesem Kontext zum Beispiel im Buch [Eva10] definiert. Die Theorie schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen geht über den Rahmen unserer Vorlesung hinaus.

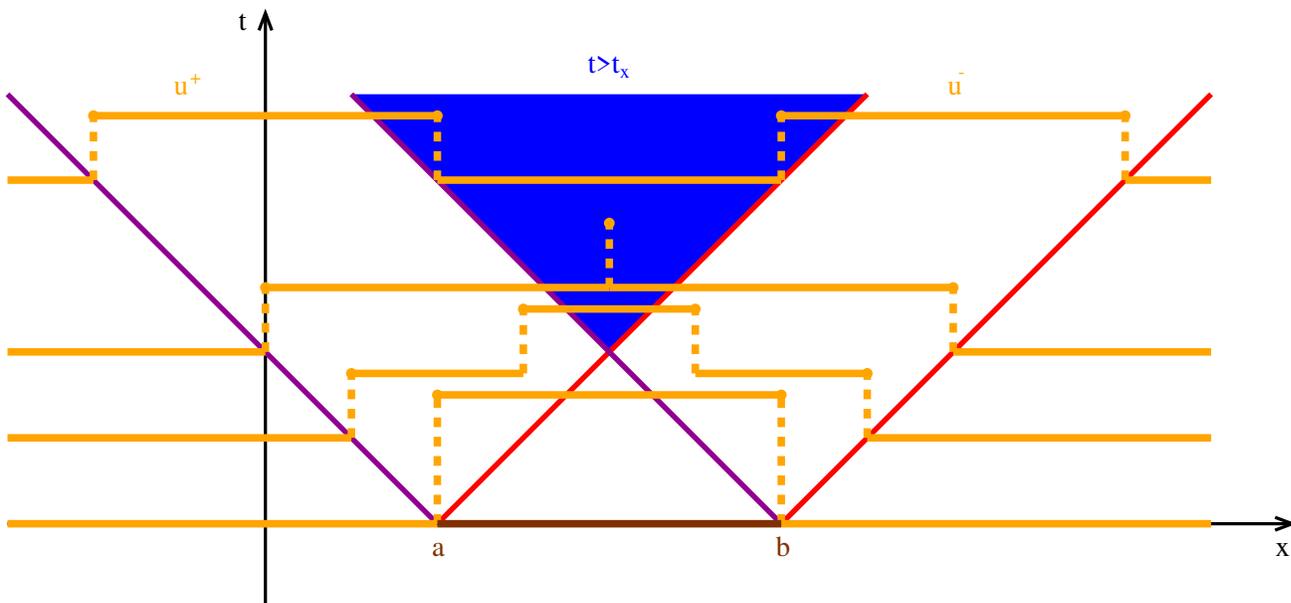


Abbildung 2.6: Illustration der Proposition 2.3. Wir nehmen an, dass die (zueinander äquivalenten) Voraussetzungen dieser Proposition erfüllt sind. Die Funktionen u^\pm sind durch $u^\pm(t, x) := v_\pm(x \pm ct)$ gegeben. u^+ ist die Rückwärtswelle und u^- die Vorwärtswelle. Im hier abgebildeten Fall sind $v_\pm^\infty = 0$ und $u_\infty = v_+^\infty + v_-^\infty = 0$. Für $t > t_x$, d. h. nachdem die Welle einen Punkt x passiert hat, ist $u(t, x) = u_\infty$. Das hier abgebildete u^\pm entspricht dem Fall, dass $u_0(x) = 1$ für $x \in [a, b]$, $u_0(x) = 0$, für $x \notin [a, b]$, $v_0 \equiv 0$.

für die Auslenkung aus der Ruhelage eines Teilchens zum Zeitpunkt t an der Stelle x . (Siehe (2.4).) Wir nehmen an, dass es Konstanten $p_\infty, v_\infty \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(t = 0, x) = p_\infty \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad (2.28)$$

$$A_t(t = 0, x) = v_\infty \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \quad (2.29)$$

Die Bedingung (2.29) bedeutet, dass sich die Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ ausserhalb von $[a, b]$ mit der gleichen Geschwindigkeit v_∞ ⁹ bewegen. Durch einen geeigneten Versuchsaufbau können wir erreichen, dass die Bedingungen (2.28,2.29) erfüllt sind.

Wir betrachten die Anfangsfunktionen für $u = p$:

$$u_0 := p(t = 0, \cdot), \quad v_0 := p_t(t = 0, \cdot)$$

Wir zeigen, dass diese Funktionen die Bedingungen (2.22,2.23,2.24) erfüllen. Gemäss (2.28) erfüllt u_0 die Bedingung (2.22) mit $u_\infty := p_\infty$. Wir definieren die Konstante C

⁹in die gleiche Richtung

wie in (2.8). Gemäss (2.9) gilt $p = CA_x$ und daher

$$\begin{aligned} p_t(t=0, x) &= CA_{xt}(0, x) \\ &= CA_{tx}(0, x) \quad (\text{wegen des Satzes von Schwarz}^{10}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wegen (2.29) folgt hieraus, dass

$$p_t(t=0, x) = 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

Somit erfüllt für $u = p$ die Anfangsfunktion $v_0 := u_t(t=0, \cdot)$ die Bedingung (2.23). Aus (2.30) folgt auch, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b p_t(0, y) dy &= C \int_a^b (A_t)_x(0, y) dy \\ &= C(A_t(0, b) - A_t(0, a)) \quad (\text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}) \\ &= C(v_\infty - v_\infty) \quad (\text{gemäss (2.29)}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit erfüllt $v_0 := p_t(t=0, \cdot)$ die Bedingung (2.24). Die Bedingungen (2.22, 2.23, 2.24) sind daher physikalisch sinnvoll.

Beweis der d'Alembertschen Formel

Beweis des Satzes 2.2: (i): Dass die Funktion u (gegeben durch (2.18)) zweimal stetig differenzierbar ist, folgt aus den Voraussetzungen, dass u_0 zweimal stetig differenzierbar ist und dass v_0 stetig differenzierbar ist.

Wir überprüfen, dass u die Wellengleichung 2.15 erfüllt: Mit Hilfe der Kettenregel finden wir

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x+ct) &= u_0'(x+ct)c \\ \implies \partial_t^2 u_0(x+ct) &= u_0''(x+ct)c^2, \\ \partial_x u_0(x+ct) &= u_0'(x+ct) \\ \implies \partial_x^2 u_0(x+ct) &= u_0''(x+ct), \\ \text{also } \partial_t^2 u_0(x+ct) &= c^2 \partial_x^2 u_0(x+ct). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\partial_t^2 u_0(x-ct) = (-c)^2 \partial_x^2 u_0(x-ct). \quad (2.32)$$

(Überprüfen Sie das!) Wir fixieren einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ und definieren die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := x + ct, \quad V_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V_0(z) := \int_0^z v_0(y) dy.$$

Wir haben

$$\int_0^{x+ct} v_0(y)dy = V_0 \circ f(t), \quad \forall t.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^{x+ct} v_0(y)dy &= (V_0 \circ f)'(t) \\ &= V_0'(f(t))f'(t) \quad (\text{wegen der Kettenregel}) \\ &= v_0(f(t))c \\ &\quad (\text{wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Analysis 1}) \\ &= v_0(x+ct)c. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$\partial_t^2 \int_0^{x+ct} v_0(y)dy = v_0'(x+ct)c^2. \tag{2.34}$$

Aus einer analogen Rechnung folgt, dass

$$\partial_x^2 \int_0^{x+ct} v_0(y)dy = v_0'(x+ct).$$

Durch Kombination mit (2.34) erhalten wir

$$\partial_t^2 \int_0^{x+ct} v_0(y)dy = c^2 \partial_x^2 \int_0^{x+ct} v_0(y)dy. \tag{2.35}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass

$$\partial_t^2 \int_0^{x-ct} v_0(y)dy = (-c)^2 \partial_x^2 \int_0^{x-ct} v_0(y)dy. \tag{2.36}$$

Wir haben

$$\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy = \int_0^{x+ct} v_0(y)dy + \int_{x-ct}^0 v_0(y)dy = \int_0^{x+ct} v_0(y)dy - \int_0^{x-ct} v_0(y)dy. \tag{2.37}$$

Indem wir (2.31,2.32,2.35,2.36) mit der Formel (2.18) für u kombinieren, erhalten wir

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

(Überprüfen Sie das!) Also erfüllt u die Wellengleichung (2.15).

Eine kurze Rechnung zeigt, dass u die Anfangsbedingung (2.16) erfüllt. (Rechnen Sie das nach!) Wir zeigen, dass u (2.17), die Anfangsbedingung für die Zeitableitung, erfüllt. Mittels der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t u(t=0, x) &= \frac{u'_0(x+c\cdot 0)c + u'_0(x-c\cdot 0)(-c)}{2} + \frac{1}{2c} \partial_t \left(\int_0^{x+ct} v_0(y) dy - \int_0^{x-ct} v_0(y) dy \right) \Big|_{t=0} \\ &\quad (\text{wegen (2.18), der Kettenregel und (2.37)}) \\ &= 0 + \frac{v_0(x+c\cdot 0)c - v_0(x-c\cdot 0)(-c)}{2c} \\ &\quad (\text{wegen (2.33) und einer analogen Rechnung für das zweite Integral}) \\ &= v_0(x). \end{aligned}$$

Also erfüllt u die Anfangsbedingung (2.17) und damit das AWP für die Wellengleichung, (2.15,2.16,2.17). Das beweist (i).

(ii): Dass die Funktion (2.18) die einzige Lösung des AWP (2.15,2.16,2.17) ist, folgt aus Satz 2.1, indem wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen die Funktionen v_{\pm} in der Formel

$$u(t, x) = v_+(x + ct) + v_-(x - ct)$$

bestimmen. Wir erhalten auf diese Weise die Formel (2.18). Siehe das Argument in [DL, 2.2 The Cauchy problem and d'Alembert's formula, S. 21–22]. Das beweist (ii) und schliesst den Beweis des Satzes 2.2 ab. \square

2.4 Inhomogene lineare PDG, Prinzip von Duhamel

Das Prinzip von Duhamel ist eine allgemeine Methode, um eine Lösung für eine *inhomogene lineare Evolutionsgleichung* zusammen mit homogenen Anfangsbedingungen zu finden. Damit meinen wir eine PDG der Form

$$\partial_t^k u + L(u) = f, \tag{2.38}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und L nur Ableitungen nach den räumlichen Variablen x_1, \dots, x_n enthält. Die Lösung ist ein Integral, in dem Lösungen v der homogenen PDG

$$\partial_t^k v + L(v) = 0$$

vorkommen, die bestimmte Anfangsbedingungen erfüllen. Wir wenden diese Methode auf die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung an.

Bemerkungen. • Eine PDG der Form (2.38) heisst *Evolutionsgleichung*, da sie formal eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto u(t, \cdot)$ ist und daher angibt, wie der Zeit- t -Zustand $u(t, \cdot)$ des betrachteten Systems evolviert, d. h., sich zeitlich entwickelt.

- Die Inhomogenität f ist ein sogenannter *Quellenterm* (*source term*). In Anwendungen spielt sie zum Beispiel die Rolle einer Energie- oder Stoffzufuhr oder einer äusseren Kraft.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in \mathbb{R}^{n+1} als $t, x = (x_1, \dots, x_n)$. Sei L ein (linearer) Differentialoperator auf \mathbb{R}^{n+1} , in dem keine Ableitungen nach der Zeit vorkommen. Damit meinen wir eine Abbildung, die eine Funktion u auf einen Ausdruck der folgenden Form abbildet:¹¹

$$L(u) = \left(\begin{array}{l} \text{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \text{Funktion von } t, x \text{ mal } u \text{ oder (höhere) } \textit{räumliche} \text{ partielle Ableitung von } u \end{array} \right).$$

Beispiele. [Evolutionsgleichungen, physikalische Relevanz]

- $L = \partial_{x_1}$
- $L(u) := e^{x_1-t} \partial_{x_2}$
- $k = 1$, $L = -\Delta = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ (Laplace-Operator). Dann ist (2.38) eine inhomogene Wärmeleitungsgleichung. Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel die zeitliche Temperaturentwicklung in einem Gebiet, indem geheizt (oder gekühlt) wird. Die Inhomogenität (= Quellenterm) f beschreibt dann die durch Heizen zugeführte Energie pro Volumen und Zeit. Die PDG (2.38) beschreibt auch Diffusion einer Stoffmenge bei gleichzeitiger externer Stoffzufuhr. Die Inhomogenität f beschreibt dann die externe Zufuhr.
- $k = 2$, $L = -\Delta$. In diesem Fall ist (2.38) eine inhomogene Version der Wellengleichung. Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel Schwingungen einer Saite, die durch eine äussere Kraft angetrieben wird. Die Inhomogenität (= Quellenterm) f beschreibt dann die Kraft pro Länge. Die PDG (2.38) beschreibt auch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium, das Ladungen und Ströme enthält. Die Inhomogenität f enthält dann Ableitungen der Ladungen und Ströme.

¹¹Mit einer (höheren) *räumlichen* partiellen Ableitung meinen wir eine (höhere) partielle Ableitung nach den Variablen x_1, \dots, x_n .

Sei $k \in \mathbb{N}$ und f eine stetige Funktion von $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die inhomogene PDG mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\partial_t^k u + L(u) = f, \tag{2.39}$$

$$u(t = 0, x) = \partial_t^0 u(t = 0, x) = 0, \tag{2.40}$$

\vdots

$$\partial_t^{k-1} u(t = 0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.41}$$

(Die 0-te Zeitableitung von u , $\partial_t^0 u$, ist die Funktion u selber.) Wir schreiben

$$\ell := \max \{k, \text{Ordnung von } L\}^{12}$$

Satz 2.5 (Prinzip von Duhamel). *Sei v eine ℓ mal stetig differenzierbare Funktion von $s \geq 0$, $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, sodass für jedes $s \in [0, \infty)$ die Funktion $u := v(s, \bullet, \bullet)$ ¹³ die homogene PDG*

$$\partial_t^k u + L(u) = 0, \tag{2.42}$$

die homogenen Anfangsbedingungen

$$u(t = s, x) = \partial_t^0 u(t = s, \bullet) = 0, \tag{2.43}$$

\vdots

$$\partial_t^{k-2} u(t = s, \bullet) = 0, \tag{2.44}$$

und die inhomogene Anfangsbedingung

$$\partial_t^{k-1} u(t = s, \bullet) = f(s, \bullet), \tag{2.45}$$

löst. Dann löst die Funktion

$$u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) := \int_0^t v(s, t, x) ds \tag{2.46}$$

die inhomogene PDG (2.39) und die homogenen Anfangsbedingungen (2.40, ..., 2.41).

Beweis: p. 64.

Dieser Satz ist nach Jean-Marie Duhamel benannt, siehe Abbildung 2.7.

¹²Die Ordnung von L ist die Ordnung der höchsten partiellen Ableitungen, die L nimmt. Zum Beispiel ist die Ordnung des Laplace-Operators $L := \Delta$ gleich 2.

¹³Damit meinen wir die Funktion $u(t, x) := v(s, t, x)$.



Abbildung 2.7: Jean-Marie Duhamel, 1797–1872, französischer Mathematiker und Physiker.

Bemerkung. Das Prinzip von Duhamel reduziert eine *inhomogene PDG* mit *homogenen Anfangsbedingungen* auf die entsprechende *homogene PDG* mit *homogenen und inhomogenen Anfangsbedingungen*. Das neue AWP ist oft einfacher zu lösen. Ein Problem auf ein anderes zu reduzieren, das einfacher lösbar ist, ist eine wichtige mathematische Strategie.

Bemerkungen 2.6. [Zeitverschiebung]

- Sei L ein Differentialoperator, dessen Koeffizientenfunktionen in der Zeit t konstant sind. Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $w : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP (mit $u := w$)

$$\partial_t^k u + L(u) = 0, \quad (2.47)$$

$$\partial_t^0 u(t = 0, \cdot) = 0, \quad (2.48)$$

$$\vdots$$

$$\partial_t^{k-2} u(t = 0, \cdot) = 0, \quad (2.49)$$

$$\partial_t^{k-1} u(t = 0, \cdot) = g. \quad (2.50)$$

Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann löst die Funktion

$$u := \tilde{w} : [s, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{w}(t, x) := w(t - s, x)$$

das AWP (2.42, 2.43, ..., 2.44, 2.45) mit $f(s, \cdot) := g$. (Überprüfen Sie das!)

- Das bedeutet, dass die *zeitverschobene* Funktion \tilde{w} das *zeitverschobene* AWP löst.

Beispiel 2.7. [Duhamel-Prinzip für inhomogene Wärmeleitungsgleichung] Wir betrachten die *inhomogene* Wärmeleitungsgleichung in einer räumlichen Dimension

$$(u_t - u_{xx})(t, x) = \sin(x), \quad \forall t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}, \quad (2.51)$$

zusammen mit der homogenen Anfangsbedingung

$$u(t = 0, \cdot) = 0. \quad (2.52)$$

Hier ist

$$n = 1, \quad k = 1, \quad L = -\partial_x^2, \quad f(t, x) = \sin(x).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & w(t, x) &:= e^{-t} \sin(x), \\ v : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & v(s, t, x) &:= w(t - s, x). \end{aligned}$$

Wie wir gesehen haben¹⁴, löst $u := w$ die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

d. h. (2.47). Trivialerweise erfüllt $u := w$ auch die homogenen Anfangsbedingungen (2.48, ..., 2.49), da es diese im Fall $k = 1$ nicht gibt, da dann $k - 2 = -1 < 0$. Des Weiteren erfüllt $u := w$ die inhomogene Anfangsbedingung

$$u(t = 0, \cdot) = \sin,$$

d. h. (2.50) mit $g := \sin$. Gemäss Bemerkung 2.6 löst die zeitverschobene Funktion $\tilde{w} = v(s, \cdot, \cdot)$ deshalb das AWP (2.42, 2.43, ..., 2.44, 2.45) mit $f(t, \cdot) := g := \sin$. Wir können also das Prinzip von Duhamel (Satz 2.5) anwenden. Wir definieren

$$\begin{aligned} u(t, x) &:= \int_0^t v(s, t, x) ds \\ &= \int_0^t e^{s-t} \sin(x) ds \\ &= e^{s-t} \Big|_{s=0}^t \sin(x) \\ &= (1 - e^{-t}) \sin(x). \end{aligned}$$

Gemäss dem Prinzip von Duhamel löst diese Funktion die inhomogene PDG (2.39), d. h. (2.51) und die homogenen Anfangsbedingungen (2.40, ..., 2.41), d. h. (2.52).¹⁵ (Überprüfen Sie das auch mittels einer direkten Rechnung!)

¹⁴Siehe (1.36).

¹⁵Da $k = 1$, gibt es nur eine Anfangsbedingung.

Beispiel. [Duhamel-Prinzip für inhomogene Wellengleichung] Wir betrachten die *inhomogene* Wellengleichung in einer räumlichen Dimension

$$(u_{tt} - u_{xx})(t, x) = g(x) := \cos(x), \quad \forall t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}, \quad (2.53)$$

zusammen mit den homogenen Anfangsbedingungen

$$u(t = 0, \bullet) = 0, \quad (2.54)$$

$$u_t(t = 0, \bullet) = 0. \quad (2.55)$$

Hier ist

$$n = 1, \quad k = 2, \quad L = -\partial_x^2, \quad f(t, x) = \cos(x).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(t, x) &:= \frac{\sin(x+t) - \sin(x-t)}{2}, \\ v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(s, t, x) &:= w(t-s, x). \end{aligned}$$

Gemäss Satz 2.2 löst $u := w$ das AWP für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{d. h. (2.47),} \\ u(t = 0, \bullet) &= 0 && \text{d. h. (2.48, \dots, 2.49)}^{16}, \\ \partial_t u(t = 0, \bullet) &= \cos && \text{d. h. (2.50).} \end{aligned}$$

(Das folgt auch aus direkten Rechnungen.) Gemäss Bemerkung 2.6 erfüllt die zeitverschobene Funktion $\tilde{w} = v(s, \bullet, \bullet)$ deshalb das AWP (2.42, 2.43, \dots, 2.44, 2.45) mit $f(t, \bullet) := \cos$. Wir können also das Prinzip von Duhamel (Satz 2.5) anwenden. Wir definieren

$$\begin{aligned} u(t, x) &:= \int_0^t v(s, t, x) ds \\ &= \int_0^t \frac{\sin(x+t-s) - \sin(x-t+s)}{2} ds \\ &= \left. \frac{\cos(x+t-s) + \cos(x-t+s)}{2} \right|_{s=0}^t \\ &= \cos(x) - \frac{\cos(x+t) + \cos(x-t)}{2}. \end{aligned}$$

Gemäss dem Prinzip von Duhamel löst diese Funktion die inhomogene PDG (2.39), d. h. (2.53) und die homogenen Anfangsbedingungen (2.40, \dots, 2.41), d. h. (2.54, 2.55). (Überprüfen Sie das auch mittels direkter Rechnungen!)

Beweis des Satzes 2.5 (Prinzip von Duhamel): Wir zeigen, dass der Satz im Fall $k = 2$ gilt. Dazu zeigen wir, dass die Funktion u die inhomogene PDG (2.39) löst. Wir definieren die Funktion

$$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(\sigma, \tau) := \int_0^\sigma v(s, \tau, x) ds. \quad (2.56)$$

Gemäss (4.24) haben wir

$$u(t, x) = \int_0^t v(s, t, x) ds = w(t, t), \quad \forall t \geq 0.$$

Gemäss dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für die Ableitung von w nach der ersten Variablen σ

$$w_\sigma(\sigma, \tau) = v(\sigma, \tau, x). \quad (2.57)$$

Gemäss dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz¹⁷ dürfen wir in (2.56) unter dem Integral nach der zweiten Variablen τ ableiten. Damit erhalten wir

$$w_\tau(\sigma, \tau) = \int_0^\sigma v_t(s, \tau, x) ds \quad (2.58)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= w_\sigma(t, t) + w_\tau(t, t) && \text{(wegen der Kettenregel)} \\ &= v(t, t, x) + \int_0^t v_t(s, t, x) ds && \text{(wegen (2.57, 2.58))} \\ &= \int_0^t v_t(s, t, x) ds && \text{(wegen der homogenen Anfangsbedingung (2.43)).} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$(2.60)$$

Indem wir nochmals nach t ableiten, erhalten wir mittels einer zu (2.59) analogen Rechnung

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= v_t(t, t, x) + \int_0^t v_{tt}(s, t, x) ds \\ &= f(t, x) - \int_0^t (L(v(s, \cdot, \cdot))) (t, x) ds^{18} && \text{(wegen (2.42))} \\ &= f(t, x) - \left(L \left(\int_0^t v(s, \cdot, \cdot) ds \right) \right) (t, x) \\ &\quad \text{(weil } L \text{ gemäss Voraussetzung linear ist und keine Ableitungen nach } t \text{ enthält)} \\ &= f(t, x) - L(u) && \text{(wegen (4.24)).} \end{aligned}$$

¹⁷Dieser Satz gehört zur sogenannten *Masstheorie*.

Also gilt

$$\partial_t^2 u + L(u) = f,$$

d. h., u löst die inhomogene PDG (2.39). Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} u(t=0, x) &= \int_0^0 v(s, t, x) ds = 0, \\ u_t(t=0, x) &= 0 \quad (\text{wegen (2.60)}). \end{aligned}$$

Daher erfüllt u die homogenen Anfangsbedingungen (2.40,2.41). Das beweist den Satz 2.5 im Fall $k = 2$. In der allgemeinen Situation folgt der Satz aus einem ähnlichen Argument, wobei wir vollständige (mathematische) Induktion nach k verwenden. \square

Bemerkung. [heuristischer Grund für das Prinzip von Duhamel] Intuitiv folgt das Prinzip von Duhamel aus Superposition. Um das zu verstehen, betrachten wir als Beispiel das AWP für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung in einer räumlichen Dimension,

$$u_t - u_{xx} = f, \tag{2.61}$$

$$u(t=0, \cdot) = 0. \tag{2.62}$$

(Im Fall $f(t, \cdot) := \sin$ haben wir dieses AWP in Beispiel 2.7 gelöst.) Sei v eine Funktion von $s \geq 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $s \in [0, \infty)$ die Funktion

$$u := v(s, \cdot, \cdot)$$

$$\text{das AWP} \quad u_t - u_{xx} = 0, \tag{2.63}$$

$$u(t=s, \cdot) = f(s, \cdot) \tag{2.64}$$

löst. Um heuristisch zu zeigen, dass die Funktion (4.24) das AWP

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f, \\ u(t=0, \cdot) &= 0 \end{aligned}$$

löst, fixieren wir $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} t_i &:= \frac{i}{m}, \\ f_i &:= f_i^{(m)} : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_i(t, x) := \chi_{[t_{i-1}, t_i)}(t) f(t, x). \end{aligned} \tag{2.65}$$

¹⁸Der Ausdruck $(L(v(s, \cdot, \cdot)))(t, x)$ ist die Funktion $L(v(s, \cdot, \cdot))$ an der Stelle (t, x) . Wir wenden hier L auf die Funktion $v(s, \cdot, \cdot)$ der Variablen t, x an.

(χ_A := charakteristische Funktion der Menge A .) Wir definieren

$$u_i := u_i^{(m)} : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u_i(t, x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq t_{i-1}, \\ (t - t_{i-1}) f(t_i, x), & \text{falls } t_{i-1} < t < t_i, \\ \frac{v(t_i, t, x)}{m}, & \text{falls } t_i \leq t. \end{cases} \quad (2.66)$$

$$(2.67)$$

$$(2.68)$$

Wir nehmen nun an, dass m gross ist. Dann löst $u := u_i$ die PDG

$$u_t - u_{xx} = f_i \quad (2.69)$$

näherungsweise (auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}$). Gemäss (2.65) gilt nämlich $f_i(t, \cdot) = 0$ für $t \in [0, t_{i-1})$. Gemäss (2.66) löst u_i die PDG (2.69) daher für $t \in [0, t_{i-1})$. Sei jetzt $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Da m gross ist, ist $\frac{1}{m}$, also die Zeitspanne zwischen t_{i-1} und t_i , klein. Gemäss (2.67) ist daher $(u_i)_{xx}(t, \cdot)$ klein und darum

$$\begin{aligned} ((u_i)_t - (u_i)_{xx})(t, \cdot) &\approx (u_i)_t(t, \cdot) \\ &= f(t_i, \cdot) \quad (\text{gemäss (2.67)}) \\ &\approx f_i(t, \cdot) \quad (\text{da } t \approx t_i). \end{aligned}$$

Also löst u_i die PDG (2.69) näherungsweise für $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Gemäss (2.68,2.63) löst u_i die PDG (2.69) für $t \in (t_i, \infty)$. Gemäss (2.66,2.67) ist u_i bei $t = t_{i-1}$ stetig. Daher löst diese Funktion die PDG (2.69) bei $t = t_{i-1}$ in einem schwachen Sinn.¹⁹ Gemäss (2.67,2.68,2.64) ist u_i bei $t = t_i$ stetig. Sie löst die PDG (2.69) daher bei $t = t_i$ in einem schwachen Sinn. Also löst u_i diese PDG näherungsweise überall, wie behauptet.

Gemäss (2.65) gilt

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i.$$

Wegen des Superpositionsprinzips²⁰ löst

$$u^{(m)} := \sum_i u_i^{(m)}$$

¹⁹Das Wort *schwach* wird in diesem Kontext zum Beispiel im Buch [Eva10] definiert. Die Theorie schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen geht über den Rahmen unserer Vorlesung hinaus.

²⁰Wir verwenden hier eine Version des Superpositionsprinzips für eine inhomogene lineare PDG. Dieses besagt, dass für solche PDG jede Linearkombination von Lösungen der PDG mit rechten Seiten gegeben durch f_i , die PDG mit rechter Seite gegeben durch die entsprechende Linearkombination der f_i löst.

daher die PDG (2.61) näherungsweise. Wegen (2.66) löst sie auch die Anfangsbedingung (2.62). Aus (2.66,2.67,2.68) folgt, dass

$$u^{(m)} \rightarrow \int_0^t v(s, t, x) ds \quad \text{für } m \rightarrow \infty, \quad \forall t, x.$$

Da $u^{(m)}$ das AWP (2.61,2.62) näherungsweise löst, folgt daraus heuristisch, dass $u(t, x) := \int_0^t v(s, t, x) ds$ dieses AWP löst. Für mehr Details zu diesem heuristischen Argument siehe [Cho22, 7.8.1. An Intuitive and Physical Explanation of Duhamel's Principle for Heat Flow with a Source, p. 303].

Kapitel 3

Fouriertheorie für periodische Funktionen

In diesem Kapitel werden wir eine wichtige Methode zur Lösung von PDG kennenlernen, die *Fourierreihenentwicklung*. Mit Hilfe dieser Entwicklung können wir jede 2π -periodische stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als die folgende unendliche Summe schreiben:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}. \quad (3.1)$$

Die rechte Seite in dieser Formel heisst die *Fourierreihe von f* . Dabei ist \widehat{f}_k der k -te *Fourierkoeffizient von f* , welcher definiert ist als die komplexe Zahl

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Als Anwendung der Fourierreihenentwicklung können wir gewisse PDG als Systeme *gewöhnlicher* DG umschreiben. Wir werden das Beispiel der Wärmeleitungsgleichung in einer räumlichen Dimension,

$$\partial_t u = \Delta u = \partial_x^2 u$$

behandeln. Wir können diese Gleichung als das folgende System gewöhnlicher DG umschreiben:

$$\frac{d}{dt} \widehat{u(t, \cdot)}_k = -k^2 \widehat{u(t, \cdot)}_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Dabei haben wir die folgende grundlegende Eigenschaft der Fourierkoeffizienten ausgenutzt, die wir herleiten werden:

$$\widehat{f'}_k = ik \widehat{f}_k.$$

Bedingung (3.2) ist ein unendliches System gewöhnlicher DG für die Funktionen $f_k(t) := \widehat{u(t, \cdot)}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir werden die Wärmeleitungsgleichung für eine räumlich periodische Funktion mit vorgegebener Anfangsbedingung lösen, indem wir dieses System lösen¹ und die Lösung in die Fourierreihenentwicklung (3.1) einfüllen.

Die Fourierreihenentwicklung spielt auch eine Schlüsselrolle bei der Beschreibung von Wellen und Schwingungen.

3.1 Periodische, stückweise stetige Funktionen, Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe sind für periodische stückweise stetige Funktionen definiert. Um diese Begriffe zu definieren, fixieren wir eine positive reelle Zahl P .

Definition 3.1 (Periodizität). *Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ P -periodisch g. d. w. gilt, dass*

$$f(x + P) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben

$$\omega := \frac{2\pi}{P}. \quad (3.3)$$

Beispiele 3.2. [periodische Funktionen] Die Funktionen

$$e^{in\omega \cdot}, \quad \cos(n\omega \cdot), \quad \sin(n\omega \cdot), \quad n \in \mathbb{Z} := \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \},$$

sind P -periodisch. (Überprüfen Sie das!) Siehe Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.3 für einige dieser Funktionen. Insbesondere erhalten wir mit $P = 2\pi$ und $n = 1$, dass die Funktionen $e^{i\cdot}$, \cos und \sin 2π -periodisch sind.

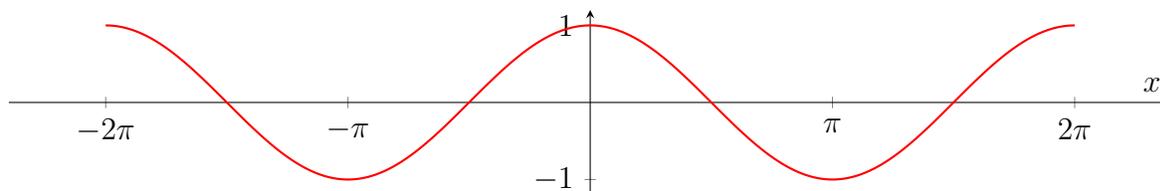


Abbildung 3.1: Die 2π -periodische Funktion \cos .

¹Was ist die Lösung?

²Damit meinen wir die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) := e^{in\omega x}$.

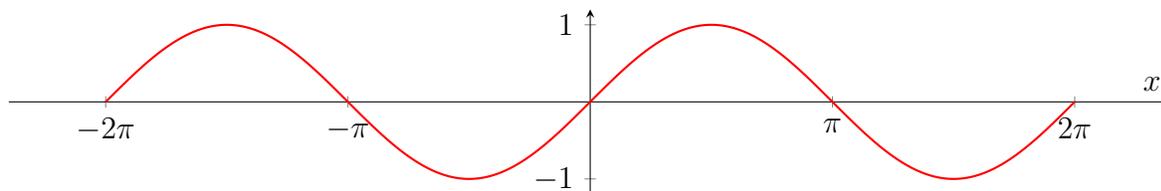


Abbildung 3.2: Die 2π -periodische Funktion \sin .

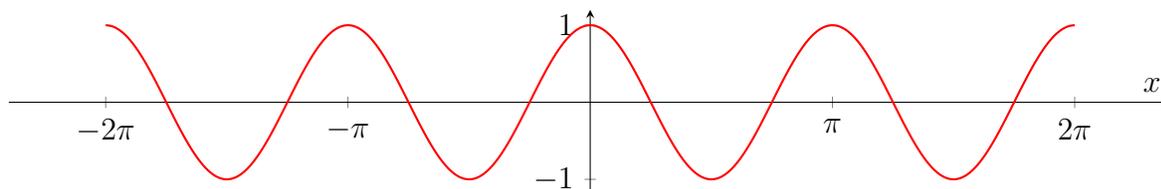


Abbildung 3.3: Die 2π -periodische Funktion $\cos(2\cdot)$, also $f(x) := \cos(2x)$. Diese Funktion ist auch π -periodisch.

Bemerkung. [Periode, Kreisfrequenz] In Anwendungen beschreibt die Funktion $e^{in\omega\cdot}$ eine Schwingung mit *kleinster Periode* $\frac{P}{n}$ und *Kreisfrequenz* (oder *Winkelfrequenz*) $n\omega$. Im Fall $n = 1$ ist also P die kleinste Periode und ω die Kreisfrequenz der Schwingung.

Die periodische Fortsetzung einer Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, ist periodisch. Das liefert viele Beispiele periodischer Funktionen. Sei $a < b$ und $\tilde{f} : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$P := b - a.$$

Definition 3.3 (periodische Fortsetzung). Wir definieren die periodische Fortsetzung von \tilde{f} als die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x) := \tilde{f}(x - jP) \text{ für } x \in [a + jP, a + (j + 1)P), j \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkungen.

- Die periodische Fortsetzung f setzt die Funktion \tilde{f} fort, d. h., sie stimmt mit \tilde{f} auf dem Intervall $[a, b)$ überein.

- Die Funktion f ist P -periodisch. (Überprüfen Sie das!)

Beispiele 3.4. [periodisch fortgesetzte Funktionen]

(i) Wir definieren die Funktion

$$\tilde{f} : \left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } -\frac{P}{2} < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \frac{P}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.4)$$

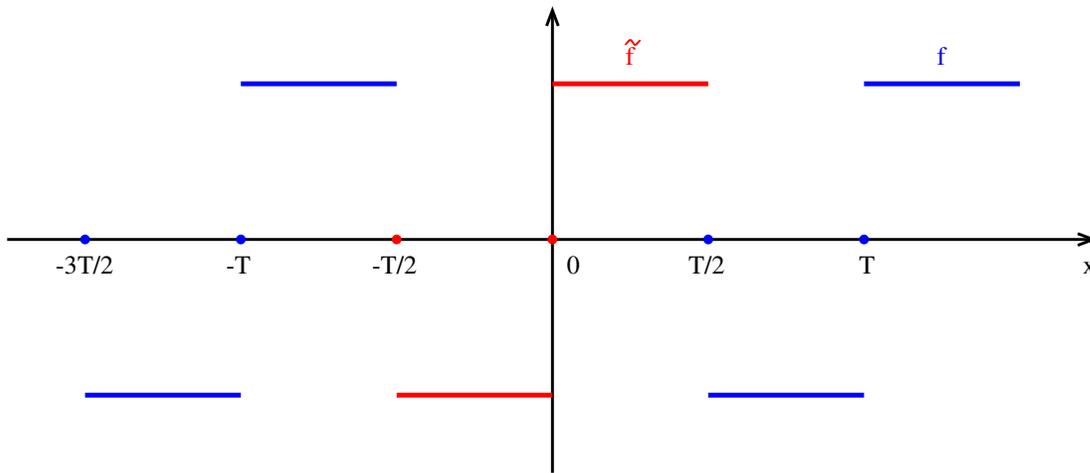


Abbildung 3.4: Die Funktion \tilde{f} und ihre periodische Fortsetzung f .

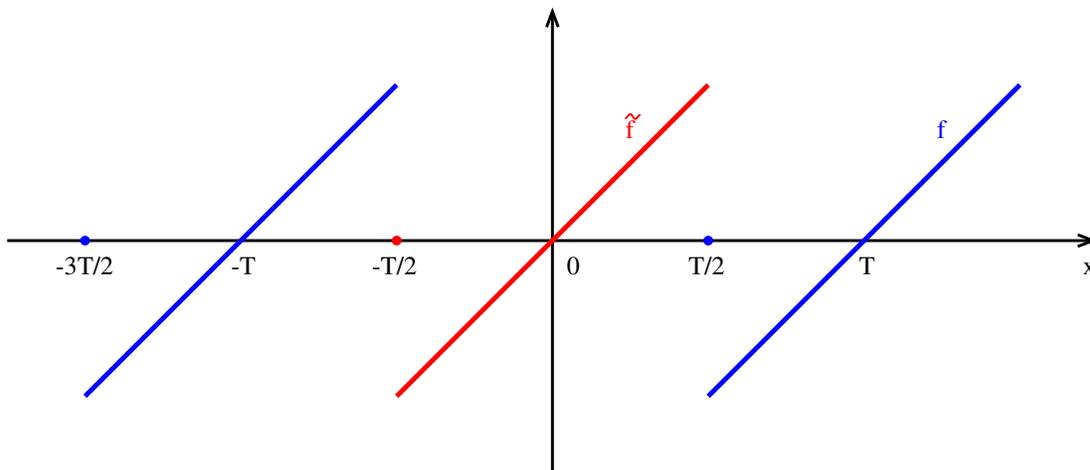


Abbildung 3.5: Die Funktion \tilde{f} und ihre periodische Fortsetzung f .

Die periodische Fortsetzung f dieser Funktion heisst *Rechteckschwingung* (oder *Rechtecksignal*). Diese Funktion ist P -periodisch. Siehe die Abbildung 3.4.

(ii) Wir definieren die Funktion

$$\tilde{f} : \left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } -\frac{P}{2} < x < \frac{P}{2}, \\ 0, & \text{falls } x = -\frac{P}{2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Die periodische Fortsetzung f dieser Funktion heisst *Sägezahnschwingung* (oder *Kippschwingung*). Diese Funktion ist P -periodisch. Siehe die Abbildung 3.5.

Die Fourierkoeffizienten können für stückweise stetige Funktionen definiert werden.

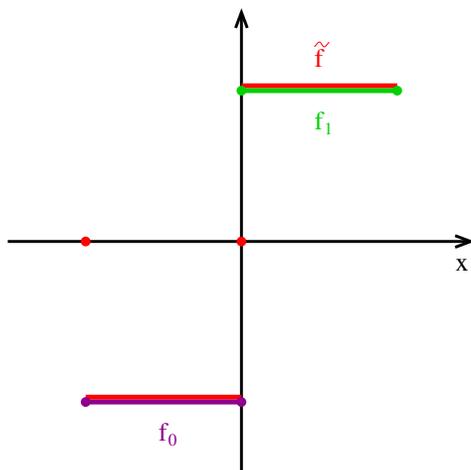


Abbildung 3.6: Die stückweise stetige Funktion \tilde{f} und die Funktionen f_0, f_1 .

Definition 3.5 (stückweise Stetigkeit). Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir nennen f stückweise stetig g. d. w. es eine natürliche Zahl m , reelle Zahlen $a < a_1 < \dots < a_{m-1} < b$ und stetige Funktionen $f_i : [a_{i-1}, a_i] \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$, gibt, sodass $f = f_i$ auf dem offenen Intervall (a_{i-1}, a_i) . Dabei definieren wir $a_0 := a$ und $a_m := b$.

Sei jetzt I ein allgemeines Intervall³. Wir nennen eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig g. d. w. ihre Einschränkung auf jedes abgeschlossene Teilintervall $[a, b]$ stückweise stetig ist.

Bemerkung. Jede stetige Funktion ist stückweise stetig.

Beispiele 3.6. [(nicht) stückweise stetige Funktion]

- (i) Die Funktionen aus den Beispielen 3.2 und 3.4 sind stückweise stetig. Betrachten wir zum Beispiel $a := -\frac{P}{2}$, $b := \frac{P}{2}$ und die Funktion \tilde{f} aus 3.4(i). Diese Funktion ist stückweise stetig, da sie die Bedingung der Definition 3.5 erfüllt mit

$$m := 2, \quad a_0 := 0 = -\frac{P}{2}, \quad a_1 := 0, \quad a_2 := b = \frac{P}{2},$$

$$f_0 : \left[-\frac{P}{2}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_0(x) := -1, \quad f_1 : \left[0, \frac{P}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := 1.$$

Siehe Abbildung 3.6. Da \tilde{f} stückweise stetig ist, gilt dasselbe für ihre P -periodische Fortsetzung f .

³ I kann also offen oder halb-offen und beschränkt oder unbeschränkt, zum Beispiel gleich \mathbb{R} , sein.

(ii) Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stückweise stetig. (Warum?)

Wir können jetzt die Fourierkoeffizienten definieren. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine P -periodische stückweise stetige Funktion und $k \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.7 (Fourierkoeffizient). *Wir definieren den k -ten Fourierkoeffizienten von f als die komplexe Zahl*

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{P} \int_0^P f(x) e^{-ik\omega x} dx. \quad (3.6)$$

(Hierbei ist ω wie in (3.3) definiert.)

Bemerkungen. [Fourierkoeffizient]

- Da f stückweise stetig ist, gilt dasselbe für die Funktion $g(x) := f(x)e^{-ik\omega x}$. Das Integral (3.6) ist daher wohldefiniert, d. h. sinnvoll. Das ist der Grund dafür, dass wir voraussetzen, dass f stückweise stetig ist.
- Im Allgemeinen ist das Integral (3.6) nicht wohldefiniert, wenn f nicht stückweise stetig ist. Ein Beispiel dafür ist die periodische Fortsetzung f der Funktion

$$\widetilde{f} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) := \frac{1}{x}.$$

Die Funktion f ist nicht stückweise stetig. (Vergleiche mit Beispiel 3.6(ii).) In diesem Fall ist das Integral (3.6) für kein k wohldefiniert (als eine komplexe Zahl). Zum Beispiel haben wir für $k = 0$

$$\widehat{f}_0 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx,$$

was nicht wohldefiniert ist als ein *eigentliches* Integral. Der Ausdruck ist wohldefiniert als ein *uneigentliches* Integral. Er hat als solches den Wert ∞ , also keinen endlichen Wert.⁴

⁴Das uneigentliche Integral ist definiert als der uneigentliche Grenzwert $\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \downarrow 0} \log x \Big|_{x=a}^1 = \lim_{a \downarrow 0} (\log 1 - \log a) = -(-\infty) = \infty$.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede P -periodische stückweise stetige Funktion g , dass

$$\int_0^P g(x) dx = \int_a^{a+P} g(x) dx.$$

(Warum?) Daraus folgt, dass \widehat{f}_k gegeben ist durch

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{P} \int_a^{a+P} f(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

Wir dürfen also das Integrationsgebiet mit a verschieben.

Beispiele 3.8. [Fourierkoeffizienten]

- (i) Seien $n, k \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen den k -ten Fourierkoeffizienten der imaginären Exponentialfunktion

$$f(x) := e^{in\omega x}.$$

Fall $n \neq k$: Gemäss Definition 3.7 gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k &= \frac{1}{P} \int_0^P e^{in\omega x} e^{-ik\omega x} dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P e^{i(n-k)\omega x} dx \\ &= \frac{1}{Pi(n-k)\omega} e^{i(n-k)\omega x} \Big|_{x=0}^P \\ &= \dots \cdot (e^{i(n-k)\omega P} - e^{i(n-k)\omega \cdot 0}) \\ &= \dots \cdot (e^{i(n-k)2\pi} - e^0) \quad (\text{wegen (3.3)}) \\ &= \dots \cdot (1 - 1) \\ & \quad (\text{Euler: } e^{2\pi mi} = \cos(2\pi m) + i \sin(2\pi m) = \cos(0) + i \sin(0) = 1, \forall m \in \mathbb{Z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass Kosinus und Sinus 2π -periodisch sind.

Fall $n = k$: Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n &= \frac{1}{P} \int_0^P e^{in\omega x} e^{-in\omega x} dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P 1 dx \\ &= \frac{P}{P} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- (ii) Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als die Rechteckschwingung mit $P = 2\pi$, also als die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f} : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Die Funktion f haben wir schon im Beispiel 3.4(i) betrachtet. Siehe die Abbildung 3.4.) Diese Funktion hat als Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1)e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx + \int_0^{\pi} 1e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx \right) = 0$$

und für jedes $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1)e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} 1e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(-ik)} \left(-e^{-ikx} \Big|_{x=-\pi}^0 + e^{-ikx} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi k} \left((-1 + e^{-ik(-\pi)}) + (e^{-ik\pi} - 1) \right) \\ &= \frac{2(-1 + (-1)^k) i}{2\pi k} \\ &\quad (\text{Eulersche Formel: } e^{\pi m i} = \cos(\pi m) + i \sin(\pi m) = (-1)^m + 0i, \forall m \in \mathbb{Z}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -\frac{2i}{\pi k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $\hat{f}_{-k} = -\hat{f}_k$. Das stimmt mit der Bemerkung 3.9 unten überein, da die Funktion f ungerade ist.

- (iii) Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als die Sägezahnsschwingung mit $P = 2\pi$, also als die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f} : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{falls } x = -\pi. \end{cases}$$

(Die Funktion f haben wir schon in im Beispiel 3.4(ii) betrachtet. Siehe die Abbildung 3.5.) Diese Funktion hat als Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

und für jedes $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi ik} \left(x e^{-ikx} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{-(\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k)}{2\pi ik} - 0 \\ &= \frac{(-1)^k i}{k}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k$. Das stimmt mit der Bemerkung 3.9 unten überein, da die Funktion f ungerade ist.

Wenn eine Funktion eine gewisse Symmetrie aufweist, nämlich gerade oder ungerade ist, dann weist die Folge ihrer Fourierkoeffizienten diesselbe Symmetrie auf. Um das zu erklären, wiederholen wir aus dem Gymnasium: Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *gerade* g. d. w.

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y -Achse ist.⁵ Ein Beispiel einer geraden Funktion ist der Kosinus. (Überzeugen Sie sich davon durch Zeichnen!)

Wir nennen f *ungerade* g. d. w.

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.⁶ Ein Beispiel einer ungeraden Funktion ist der Sinus. Für weitere Beispiele siehe die Abbildungen 3.4 und 3.5.

Bemerkung 3.9. [Fourierkoeffizienten einer (un-)geraden Funktion] Indem wir $x = -y$ auf der rechten Seite von (3.6) einfüllen, erhalten wir

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(-y) e^{-i(-k)\omega y} dy.$$

Daraus folgt für jede P -periodische stückweise stetige Funktion f :

⁵D. h. , der Graph bleibt gleich, wenn wir ihn an der y -Achse spiegeln.

⁶D. h. , der Graph bleibt gleich, wenn wir ihn am Koordinatenursprung spiegeln.

- Falls f gerade ist, dann ist die Folge⁷ ihrer Fourierkoeffizienten gerade, d. h.

$$\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

- Falls f ungerade ist, dann ist die Folge ihrer Fourierkoeffizienten ungerade

$$\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

(Überprüfen Sie das!)

3.2 Fourierreihenentwicklung

In diesem Abschnitt behandeln wir die Fourierreihe einer periodischen stückweise stetigen Funktion f . Das ist die Folge

$$\left(\sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega \cdot} \right)_{N \in \mathbb{N}_0}.$$

Unter geeigneten Bedingungen konvergiert diese Folge punktweise gegen f . Das bedeutet, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} = f(x),$$

also, dass die Fourierreihe die Funktion f darstellt.

Erinnerung an Analysis 1: Folgen und Reihen

Um Fourierreihe zu definieren, erinnern wir uns an die Begriffe *Folge* und *Reihe* aus Analysis 1. Eine *Folge* ist informell eine unendliche Liste von mathematischen Objekten a_0, a_1, a_2, \dots . Oft sind die Objekte Zahlen. Die folgende Definition präzisiert diese Idee. Wir schreiben

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$$

für die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0.

Definition 3.10 (Folge). *Eine komplexe Zahlenfolge (oder kurz Folge) ist eine Funktion*

$$a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wir schreiben $a_n := a(n)$ und

$$(a_n) := (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := a.$$

⁷Wir brauchen hier das Wort *Folge* in einer etwas allgemeineren Bedeutung als vorher, da der Folgenindex k hier auch negative Werte annehmen darf.

Beispiele. [Folge]

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, also $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, \dots$
- Sei $z \in \mathbb{C}$. Die *geometrische Folge mit dem Quotienten z* ist gegeben durch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (z^n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Für $z = \frac{1}{2}$ ist diese Folge zum Beispiel gegeben durch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad \text{also} \quad a_0 = \frac{1}{2^0} = 1, a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \dots$$

Informell sagen wir, dass eine Folge gegen eine komplexe Zahl A konvergiert, falls ihre Glieder sich A immer mehr nähern, wenn n grösser wird. In diesem Fall nennen wir A den *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge. In Analysis 1 wurde dieser Begriff präzise definiert.

Wie Sie in Analysis 1 gehört haben, ist eine *Reihe* intuitiv gesprochen eine unendliche Summe, wie zum Beispiel

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (3.9)$$

Wir werden diesen Begriff jetzt präzisieren, indem wir eine unendliche Summe als den Grenzwert ihrer partiellen Summen $\frac{1}{1}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \dots$ definieren. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge (komplexer Zahlen).

Definition 3.11 (Teilsumme, Reihe und Grenzwert davon). *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n -te Teilsumme (oder Partialsumme) der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ als die Summe*

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n.$$

Wir definieren die zu $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörende Reihe (oder Folge der Partialsummen) als die Folge

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Falls diese Folge konvergiert, dann definieren wir

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\ &:= \lim_{n \in \mathbb{N}_0} (s_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bemerkungen 3.12. [Reihe]

- Das im Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty}$ auftretende Symbol ∞ hat keine selbständige mathematische Bedeutung. Der Grund, dieses Symbol zu verwenden, ist, dass wir intuitiv gesprochen unendlich lange zusammenzählen, d. h., wir summieren über alle Indizes $0 \leq k < \infty$. Achtung: Der Index k nimmt den Wert ∞ nicht an, weil ∞ keine natürliche Zahl ist.
- Der Grenzwert (3.10) wird oft die *Summe der Reihe* genannt. Das ist eine unglückliche Wortwahl, da es sich stattdessen um den *Grenzwert* der Reihe handelt, nicht um die *Summe* der Reihe im obigen Sinn. (Reihe = Folge der Teilsummen)
- In einigen Büchern wird das Wort “Reihe” nicht präzise definiert. Es wird dort für den intuitiven Begriff einer unendlichen Summe gebraucht. Eine solche “Reihe” wird dort mit “ $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ” notiert. In dieser Vorlesung verwenden wir den Ausdruck “ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ” stattdessen für den Grenzwert der zur Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörenden Reihe. (Siehe die obige Definition 3.11.)

Beispiel. [geometrische Reihe] Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Zahl. Die *geometrische Reihe mit Quotient* z ist die zur Folge $(z^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörende Reihe. Diese Reihe ist durch die Folge $(\sum_{k=0}^n z^k)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben, d. h. durch

$$1, \quad 1 + z, \quad 1 + z + z^2, \quad \dots$$

Wie Sie in Analysis 1 gesehen haben, konvergiert diese Reihe im Fall $|z| < 1$ ⁸ gegen $\frac{1}{1-z}$, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Insbesondere haben wir also

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Wir haben somit der unendlichen Summe (3.9) eine präzise Bedeutung verliehen und die Summe berechnet.

⁸Der Absolutbetrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + iy$ ist gegeben durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Fourierreihe, stückweise stetige Differenzierbarkeit, Fourierreihenentwicklung, Anwendung auf die Berechnung von π

Auf Definition 3.11 aufbauend führen wir jetzt den Begriff der Fourierreihe einer Funktion ein. Sei $P > 0$ eine reelle Zahl und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine P -periodische stückweise stetige Funktion.

Definition 3.13 (Fourierreihe). Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die N -te Fourier-teilsomme von f als die Funktion

$$s_N^f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s_N^f(x) := \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x}.$$

Wir definieren die Fourierreihe von f (in Exponentialform) als die Folge von Funktionen

$$\left(s_N^f \right)_{N \in \mathbb{N}_0}.$$

Bemerkungen. [Fourierreihe]

- Das ist die zur Folge $\left(\widehat{f}_k e^{ik\omega \cdot} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörende Reihe (analog zur Definition 3.11). Das rechtfertigt den Namen *Fourierreihe*.
- In der Physik werden die Glieder $\widehat{f}_k e^{ik\omega \cdot}$ der obigen Folge *Fouriermoden* genannt.
- Die Fourierreihe ist nach Joseph Fourier benannt, siehe Abbildung 1.1.

Definition 3.14 (stückweise stetige Differenzierbarkeit). Sei f eine komplexwertige Funktion, die auf einem geschlossenen oder offenen Intervall definiert ist. Wir nennen f stückweise stetig differenzierbar g. d. w. die Bedingung der Definition 3.5 (stückweise Stetigkeit) mit “stetig” ersetzt durch “stetig differenzierbar”⁹ erfüllt ist.

Bemerkungen. • Jede stetig differenzierbare Funktion ist stückweise stetig differenzierbar.

- Jede stückweise stetig differenzierbare Funktion ist stückweise stetig.

Beispiele 3.15. [stückweise stetige Differenzierbarkeit]

- (i) Die Funktionen aus den Beispielen 3.2 und 3.4 (Abbildungen 3.4 und 3.5) sind stückweise stetig differenzierbar. Das folgt aus einem dem Beispiel 3.6(i) analogen Argument.

⁹“Stetig differenzierbar” bedeutet “differenzierbar mit stetiger Ableitung”.

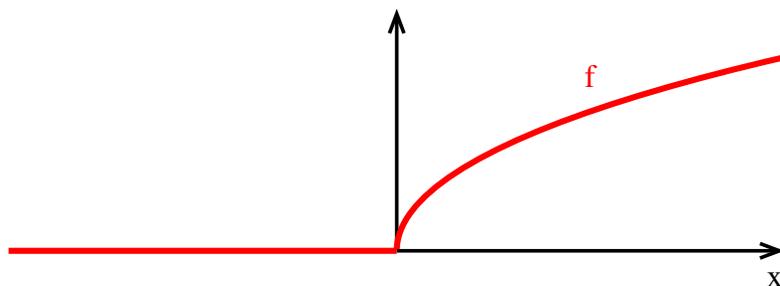


Abbildung 3.7: Eine nicht stückweise stetig differenzierbare Funktion.

(ii) Wir betrachten die Funktion gegeben durch die Wurzel des Betrags,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

siehe Abbildung 3.7. Diese Funktion ist nicht stückweise stetig differenzierbar. (Warum?) Sie ist jedoch stetig und daher stückweise stetig.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung). *Sei f eine P -periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in x gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f im Punkt x ,*

$$\sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\omega x} \rightarrow \tilde{f}(x) := \frac{1}{2} \left(\lim_{y \uparrow x} f(y) + \lim_{y \downarrow x} f(y) \right) \quad (N \rightarrow \infty),$$

$$d. h. \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\omega x} = \tilde{f}(x).$$

Abbildung 3.8 illustriert den Satz 3.16 am Beispiel der Rechteckschwingung.

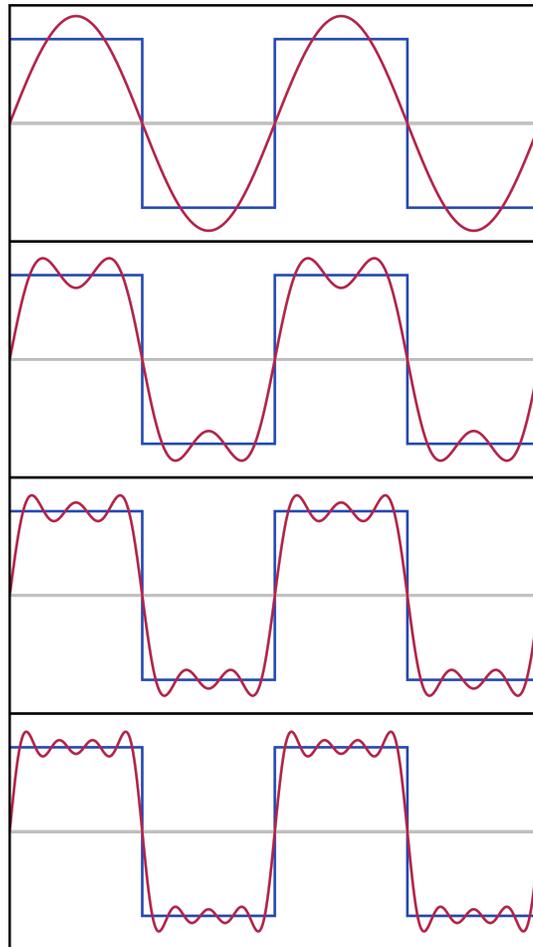


Abbildung 3.8: Blau: Rechteckschwingung f . Rot: Die N -te Fourierteilssumme für $N = 1, 3, 5, 7$ für die Rechteckschwingung. Wir können hier empirisch erkennen, dass die Fourierreihe von f in jedem Stetigkeitspunkt x von f gegen $f(x)$ konvergiert. Wir sehen auch, dass die Fourierreihe in jeder Unstetigkeitsstelle (= Sprungstelle) x von f gegen den Mittelwert y der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f in x konvergiert. In diesem Beispiel ist nämlich jede Fourierteilssumme in einem solchen Punkt gleich 0, also gleich y .

Bemerkungen. [punktweise Fourierreihenentwicklung]

- Sie haben eine trigonometrische Version dieses Satzes in der Vorlesung *Komplexe Analysis* kennengelernt.
- Der Ausdruck $\lim_{y \uparrow x} f(y)$ ist der linksseitige Grenzwert von f im Punkt x , d. h. der Grenzwert der Einschränkung von f auf das Intervall $(-\infty, x)$ an der Stelle x . $f(y)$ nähert sich diesem Grenzwert, wenn y sich x von links nähert. Sie

haben diesen Grenzwert in Analysis 1 kennengelernt. Der Ausdruck $\lim_{y \downarrow x} f(y)$ ist der rechtsseitige Grenzwert von f im Punkt x , d. h. der Grenzwert der Einschränkung von f auf das Intervall (x, ∞) an der Stelle x .

- Falls die Funktion f im Punkt x stetig ist, dann gilt $\tilde{f}(x) = f(x)$. Der Satz sagt dann also, dass die Fourierreihe gegen $f(x)$ konvergiert.
- Sei S eine Teilmenge von \mathbb{R} . Wir sagen, dass eine Folge von Funktionen auf \mathbb{R} auf S *punktweise gegen eine Funktion f* konvergiert, falls die Funktionen in jedem Punkt von S gegen f konvergieren. Wir betrachten eine periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Satz 3.16 impliziert, dass die Fourierreihe auf der Menge der Stetigkeitsstellen von f *punktweise gegen f* konvergiert. Die Fourierreihe stellt die Funktion f daher in jedem Punkt dar, in dem f stetig ist. Wenn die Funktion periodisch, stückweise stetig differenzierbar und stetig ist, dann können wir sie also als eine unendliche Summe von Vielfachen der imaginären Exponentialfunktionen $e^{ik\omega \cdot}$ ($k \in \mathbb{Z}$) schreiben.¹⁰ Dieses Umschreiben heisst *Fourierreihenentwicklung*.
- Später werden wir die Fourierreihenentwicklung verwenden, um Differentialgleichungen zu lösen (zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung).
- Falls die Funktion periodisch und nur stückweise *stetig* ist, dann ist die Aussage des Satzes im Allgemeinen falsch. Es gibt sogar eine stetige (nicht nur stückweise stetige) Funktion, deren Fourierreihe im Punkt 0 unbeschränkt ist und darum dort nicht konvergiert. Insbesondere konvergiert die Fourierreihe im Punkt 0 also nicht gegen $f(0)$.

Beispiel. [Fourierreihenentwicklung der imaginären Exponentialfunktion] Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die imaginäre Exponentialfunktion

$$f(x) := e^{in\omega x}.$$

Diese Funktion ist P -periodisch, stetig differenzierbar, also stückweise stetig differenzierbar und stetig. Gemäss Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) konvergiert ihre Fourierreihe daher in jedem Punkt x gegen $f(x)$. Es gilt also

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\omega x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\omega \cdot} = f(x).$$

Die Fourierreihe stellt die Funktion f daher in diesem Fall überall dar. Das können wir auch wie folgt durch eine direkte Rechnung sehen. Wie in Beispiel (i) berechnet, sind

¹⁰So eine Summe ist eine *unendliche Linearkombination* der Funktionen $e^{ik\omega \cdot}$, $k \in \mathbb{Z}$.

die Fourierkoeffizienten der Funktion f nämlich gegeben durch

$$\widehat{f}_k = \delta_k^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = n, \\ 0, & \text{falls } k \neq n. \end{cases}$$

Die N -te Fourierteilsumme von f ist daher gegeben durch

$$s_N^f(x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} = \begin{cases} 0, & \text{falls } N < |n|, \\ 1e^{in\omega x} = f(x), & \text{falls } N \geq |n|. \end{cases}$$

Die Fourierreihe von f im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stimmt daher ab dem N -ten Glied $s_N^f(x)$ mit $f(x)$ überein und konvergiert darum gegen $f(x)$.

Im Beispiel der imaginären Exponentialfunktion bestätigt der Satz über die Fourierreihenentwicklung also eine uns schon bekannte Tatsache.

Beispiel 3.17. [Fourierreihenentwicklung der Rechteckschwingung, Anwendung auf die Berechnung von π] Wir betrachten den Fall $P = 2\pi$ und definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als die Rechteckschwingung, also als die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f} : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Wie in Beispiel 3.4(i) berechnet, sind die Fourierkoeffizienten dieser Funktion gegeben durch

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ \frac{2}{\pi ik}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Gemäss Definition 3.13 ist die Fourierreihe von f darum gegeben durch

$$\left(\sum_{k=-N, \dots, N: k \text{ ungerade}} \frac{2}{\pi ik} e^{ik\cdot} \right)_{N \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=1, \dots, N: k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(k\cdot) \right)_{N \in \mathbb{N}_0}. \quad (3.12)$$

(Hier haben wir die Eulersche Formel gebraucht.) Gemäss Beispiel 3.15(i) ist die Funktion f stückweise stetig differenzierbar. Gemäss Satz 3.16 konvergiert ihre Fourierreihe darum in jedem Punkt x gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion im Punkt x , d. h., die unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} = \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(kx)$$

existiert, und

$$\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(kx) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \uparrow x} f(y) + \lim_{y \downarrow x} f(y) \right). \quad (3.13)$$

Im Fall $x = 0$ erhalten wir

$$\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(k \cdot 0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \uparrow 0} (-1) + \lim_{y \downarrow 0} 1 \right) = 0.$$

Das wussten wir schon, da $\sin(k \cdot 0) = 0$, für alle k . (Vergleiche mit Abbildung 3.8.) Der Satz über die Fourierreihenentwicklung bestätigt im Beispiel der Rechteckschwingung und des Punktes $x = 0$ also eine uns schon bekannte Tatsache.

Interessanter wird es, wenn wir den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ betrachten. Die Funktion f ist in diesem Punkt stetig. Gemäss Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) konvergiert die Fourierreihe von f im Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ daher gegen $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, d. h.

$$\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (3.14)$$

Siehe Abbildung 3.8 für eine Illustration dieser Tatsache. Für jedes ungerade k gilt

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$$

Indem wir das in (3.14) einsetzen, erhalten wir

$$\pi = 4 \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \dots \right).$$

Das ist die Gregory-Leibniz-Formel für π . Sie ist nach James Gregory und Gottfried Wilhelm Leibniz benannt. (Siehe die Abbildungen 3.9 und 3.10.) Mit Hilfe dieser Formel können wir π beliebig genau bestimmen, indem wir die Summe der ersten paar Terme berechnen. (Wir müssen dazu bei vorgegebener Näherungsgenauigkeit genügend viele Terme verwenden.) Der Satz über die Fourierreihenentwicklung liefert mittels der Rechteckschwingung und des Punktes $x = \frac{\pi}{2}$ also eine interessante neue Tatsache.

Darstellung der Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form, Fourierreihe einer (un)geraden Funktion

Mit Hilfe der Eulerschen Formel können wir jede Fourierreihe als eine Reihe schreiben, in der Kosinus- und Sinusfunktionen statt imaginärer Exponentialfunktionen vorkommen. Es gilt nämlich die folgende Proposition. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine P -periodische



Abbildung 3.9: James Gregory, 1638 - 1675, schottischer Mathematiker.



Abbildung 3.10: Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716, Deutscher Mathematiker.

stückweise stetige Funktion. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die k -ten *trigonometrischen Fourierkoeffizienten* von f als

$$a_k := \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad (3.15)$$

$$b_k := \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin(k\omega x) dx. \quad (3.16)$$

Proposition 3.18 (Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form). (i) Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ ist die N -te *Fourierteilsumme* von f im Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)). \quad (3.17)$$

(ii) Falls f gerade ist, dann gilt

$$b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Falls f ungerade ist, dann gilt

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkungen 3.19. [Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form]

- (a) Wir nennen die rechte Seite von (3.17) die N -te *Fourierteilsumme* von f in *Kosinus-Sinus-Form* im Punkt x und die Folge dieser Teilsummen die N -te *Fourierreihe* von f in *Kosinus-Sinus-Form* (oder in *trigonometrischer Form*) im Punkt x .

- (b) Wir nehmen an, dass f stückweise stetig differenzierbar ist. Gemäss Proposition 3.18 und Satz 3.16 konvergiert dann die Fourierreihe von f in Kosinus-Sinus-Form in jeder Stetigkeitsstelle x von f gegen $f(x)$. Es gilt dann also

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)). \end{aligned}$$

In einem allgemeinen Punkt x konvergiert die Fourierreihe von f in Kosinus-Sinus-Form gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f im Punkt x .

- (c) (ii) bedeutet, dass in der Kosinus-Sinus-Form der Fourierreihe einer geraden Funktion nur Kosinusfunktionen vorkommen, keine Sinusfunktionen. Das ist plausibel, da die Kosinusfunktionen gerade und die Sinusfunktionen ungerade sind.
- (d) Analog bedeutet (iii), dass in der Kosinus-Sinus-Form der Fourierreihe einer ungeraden Funktion nur Sinusfunktionen vorkommen, keine Kosinusfunktionen.
- (e) Proposition 3.18 wurde als Aufgabe in Übungsserie 6 gestellt (Darstellung der Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form, Fourierreihe einer (un)geraden Funktion).

Beispiel. [Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form für die Rechteckschwingung] Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als die Rechteckschwingung mit $P = 2\pi$, also als die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f} : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f haben wir schon in den Beispielen 3.4(i), ii und 3.17 betrachtet. Wir berechnen die Fourierreihe von f in Kosinus-Sinus-Form. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

Fall $k \neq 0$: Gemäss (3.15) gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\sin(kx)}{k} \Big|_{x=-\pi}^0 + \frac{\sin(kx)}{k} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Gemäss (3.16) gilt

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(kx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{x=-\pi}^0 - \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1 - (-1)^k - (-1)^k + 1}{k\pi} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ \frac{4}{\pi k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Fall $k = 0$: Gemäss (3.15) gilt

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0 \cdot x) dx = \frac{1}{\pi} ((-1)\pi + 1 \cdot \pi) = 0. \tag{3.20}$$

Sei $N \in \mathbb{N}_0$. Gemäss Proposition 3.18 haben wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ikx} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
 &= \sum_{k=1, \dots, N, k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(kx) \quad (\text{wegen (3.18,3.19,3.20)}). \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist die N -te Fourierteilssumme von f in Kosinus-Sinus-Form im Punkt x . Die Folge dieser Teilsummen ist die Fourierreihe von f in Kosinus-Sinus-Form im Punkt x .

Gemäss Beispiel 3.15(i) ist die Funktion f stückweise stetig differenzierbar. Gemäss Bemerkung 3.19(b) konvergiert die Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form, (3.21), daher in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktion im Punkt x , d. h.

$$\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k} \sin(kx) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \uparrow x} f(y) + \lim_{y \downarrow x} f(y) \right).$$

Das ist die Formel (3.13), die wir schon im Beispiel 3.17 berechnet hatten.

Bemerkung. [Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form für die Rechteckschwingung] Gemäss (3.21) treten in der Fourierreihe der Rechteckschwingung in Kosinus-Sinus-Form nur Sinusfunktionen auf, keine Kosinusfunktionen. Das folgt auch aus Proposition 3.18(iii), da die Funktion f ungerade ist.

Der Beweis der Proposition 3.18 beruht auf der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Beweis der Proposition 3.18: Sei $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} &= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) (e^{-ik\omega x} + e^{-i(-k)\omega x}) dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \cdot 2 \cdot \cos(k\omega x) dx \quad (\text{mittels der Eulerschen Formel (3.22)}) \\ &= a_k, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} i(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) &= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) i (e^{-ik\omega x} - e^{-i(-k)\omega x}) dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \cdot 2 \cdot \sin(k\omega x) dx \quad (\text{mittels der Eulerschen Formel (3.22)}) \\ &= b_k. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(i): Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} + \widehat{f}_{-k} e^{-ik\omega x} &= \widehat{f}_k (\cos(k\omega x) + i \sin(k\omega x)) + \widehat{f}_{-k} (\cos(-k\omega x) + i \sin(-k\omega x)) \\ &\quad (\text{Eulersche Formel}) \\ &= (\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}) \cos(k\omega x) + i (\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) \sin(k\omega x) \\ &= a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \quad (\text{wegen (3.23,3.24)}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} &= \widehat{f}_0 \cdot 1 + \sum_{0 \neq k=-N, \dots, N} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \quad (\text{wegen (3.23,3.25)}), \end{aligned}$$

d. h. die Formel (3.17). Das zeigt (i).

(ii): Wir nehmen an, dass f gerade ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Gemäss Bemerkung 3.9 gilt dann die Gleichheit (3.7), d. h.

$$\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k.$$

Mittels (3.24) folgt daraus, dass

$$b_k = i(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) = 0.$$

Das zeigt (ii).

(iii): Wir nehmen an, dass f ungerade ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Gemäss Bemerkung 3.9 gilt dann die Gleichheit (3.8), d. h.

$$\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k.$$

Mittels (3.23) folgt daraus, dass

$$a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = 0.$$

Das zeigt (iii) und schliesst den Beweis der Proposition 3.18 ab. \square

Bemerkung. [(un-)gerade Funktion] Alternativ folgt (ii) direkt aus der Formel für b_k , (3.16), und der Tatsache, dass $f \sin(k\omega \cdot)$ ungerade ist, falls f gerade ist. Ein analoges Argument zeigt auch (iii).

Grundlage für die Fourierreihenentwicklung

In diesem Unterabschnitt lernen wir den philosophischen Grund für Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) kennen. Dazu benötigen wir die Begriffe *komplexer Vektorraum*, *Skalarprodukt* und *Orthonormalbasis*, die in der linearen Algebra behandelt werden. Dieser Unterabschnitt ist keine Voraussetzung für das Verständnis des Rests der Vorlesung.

Satz 3.16 besagt, dass die Fourierreihe einer periodischen Funktion unter gewissen Bedingungen in einem gewissen Sinn (nämlich punktweise) gegen die Funktion konvergiert. Der philosophische Grund für diese Tatsache ist, dass die Funktionen $e^{in\omega \cdot}$, $n \in \mathbb{Z}$, eine *Orthonormalbasis* des Vektorraumes gewisser periodischer Funktionen bilden.

Um das zu erklären, schreiben wir

$$V := \{P\text{-periodische stückweise stetige, rechtsstetige}^{11} \text{ Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C}\}.$$

Diese Menge stellen wir mit punktweiser Addition und punktweiser komplexer Skalarmultiplikation aus. Damit wird V ein *komplexer Vektorraum*.¹² Wir fassen die Elemente von V , also die P -periodischen stückweise stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{C} als Vektoren auf. (Diese Vektoren verhalten sich analog zu den Vektoren in \mathbb{C}^n oder \mathbb{R}^n .) Auf dem Vektorraum V definieren wir das *L^2 -Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{P} \int_0^P f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.26)$$

(Sie haben dieses Skalarprodukt schon in der Vorlesung *Lineare Algebra* kennengelernt. Siehe [Gra, Beispiel 4.2.0.2 (Das euklidische und das L^2 -Skalarprodukt)].)

¹²Dieser Vektorraum ist unendlich-dimensional.

Satz 3.20. Die Funktionen $e^{ik\omega^*}$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden eine Orthonormalbasis von V bezüglich des Skalarprodukts $\langle \rangle$.

Das bedeutet per definitionem, dass diese Funktionen normiert sind¹³ und dass jede Funktion in V als eine unendliche Linearkombination dieser Funktionen entwickelt werden kann, d. h. für jedes $f \in V$ gilt

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e^{ik\omega^*} \rangle e^{ik\omega^*} \\ &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \langle f, e^{ik\omega^*} \rangle e^{ik\omega^*} \quad (\text{Limes bezüglich des Skalarprodukts } \langle \rangle) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega^*} \quad (\text{da } \widehat{f}_k = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) e^{-ik\omega x} dx = \langle f, e^{ik\omega^*} \rangle). \end{aligned}$$

Das stimmt mit der Aussage des Satzes 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) überein, bis auf die unterschiedliche Bedeutung des Limes (Limes bezüglich des Skalarprodukts $\langle \rangle$ versus punktweiser Limes). Der philosophische Grund für Satz 3.16 ist also, dass die Funktionen $e^{ik\omega^*}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis von V bilden.

Bemerkungen 3.21. [Orthonormalbasen der imaginären Exponentialfunktionen und der trigonometrischen Funktionen]

- (i) Da die Funktionen $e^{ik\omega^*}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis von V bilden, sind sie orthonormal, d. h. normiert und orthogonal zueinander, d. h., es gilt

$$\langle e^{im\omega^*}, e^{in\omega^*} \rangle = \delta_{mn}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

(Kronecker-Delta). Das folgt auch direkt aus der Definition (3.26), also

$$\langle e^{im\omega^*}, e^{in\omega^*} \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P e^{im\omega x} \overline{e^{in\omega x}} dx,$$

aus der Gleichheit $\overline{e^{in\omega x}} = e^{-in\omega x}$ und den Rechnungen in Beispiel 3.8(i) (Fourierkoeffizienten der imaginären Exponentialfunktion).

- (ii) Die vorherige Bemerkung rechtfertigt den Teil *orthonormal* im Term *Orthonormalbasis*.

¹³d. h. Norm gleich 1 haben. Die (L^2 -)Norm einer Funktion $f \in V$ ist definiert als $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

- (iii) Die Fourierkoeffizienten sind die einzigen Koeffizienten, womit eine gegebene Funktion als eine unendliche Linearkombination der imaginären Exponentialfunktionen dargestellt werden kann. Damit meinen wir das Folgende. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ P -periodisch und stückweise stetig und $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, so, dass

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega\bullet} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega\bullet}.^{14}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$c_n = \langle f, e^{in\omega\bullet} \rangle.$$

Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} \langle f, e^{in\omega\bullet} \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k \langle e^{ik\omega\bullet}, e^{in\omega\bullet} \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k \delta_{kn} \quad (\text{wegen der Orthogonalitätsrelation (3.27)}) \\ &= c_n. \end{aligned}$$

Diese Rechnung heisst der *Fouriertrick*.

- (iv) Analog zu Satz 3.20 bilden die trigonometrischen Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}^{15}, \quad \cos(k\omega\bullet), \quad \sin(k\omega\bullet), \quad k \in \mathbb{N},$$

eine Orthonormalbasis des Vektorraums V bezüglich des Skalarprodukts $2\langle \cdot, \cdot \rangle$. Das folgt aus Satz 3.20 und Proposition 3.18.

3.3 Fourierreihen und partielle Differentialgleichungen, die Wärmeleitungsgleichung

Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, lösen wir in diesem Abschnitt das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit räumlich periodischer Bedingung mit

¹⁴Wir meinen den Limes bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

¹⁵Damit meinen wir die konstante Funktion gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Diese Funktion ist trigonometrisch, da $1 = \cos(0x)$, für alle x .

Hilfe der Fourierreihenentwicklung. Als eine Anwendung davon lösen wir anschliessend das Anfangswertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen.

Seien a und P positive reelle Zahlen und $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine P -periodische Funktion. Wir betrachten die räumlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (WLG)

$$u_t = au_{xx} \quad (3.28)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.29)$$

und der räumlich periodischen Bedingung¹⁶

$$u(t, x + P) = u(t, x), \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

Dieses Anfangswertproblem mit räumlich periodischer Bedingung beschreibt zum Beispiel die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung in einem dünnen Metallring. Das folgt aus Überlegungen, die analog zu denen im Abschnitt 1.3 sind. Wir nehmen dazu an, dass der Metallring durch den Einheitskreis in der (x_1, x_2) -Ebene gegeben ist. Wir parametrisieren den Ring mittels der Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(x) := \left(\cos\left(\frac{2\pi}{P}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{P}x\right) \right).$$

Die Temperaturverteilung auf dem Metallring zu einem festen Zeitpunkt t wird durch eine Funktion beschrieben, die auf dem Ring definiert ist. Mittels der Parametrisierung ψ entspricht eine solche Funktion der Funktion $u(t, \cdot)$, die auf \mathbb{R} definiert und P -periodisch ist. (Warum?) Siehe Abbildung 3.11. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass

$$a = 1, \quad P = 2\pi.$$

(In der physikalischen Anwendung auf die Temperaturverteilung in einem Metallring können wir das erreichen, indem wir die physikalischen Einheiten geeignet wählen.)

Der folgende Satz liefert eine Lösung des Problems (3.28,3.29,3.30). Er besagt auch, dass dies die einzige Lösung des Problems ist. In diesem Satz kommt das *kartesische Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen X und Y vor. Dieses ist definiert als die Menge aller Paare (x, y) , wobei $x \in X$ und $y \in Y$, also

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

¹⁶Diese Bedingung wird manchmal *periodische Randbedingung* genannt. Das scheint mir ungeschickt, da das betrachtete räumliche Gebiet \mathbb{R} ist, welches keinen Rand besitzt.

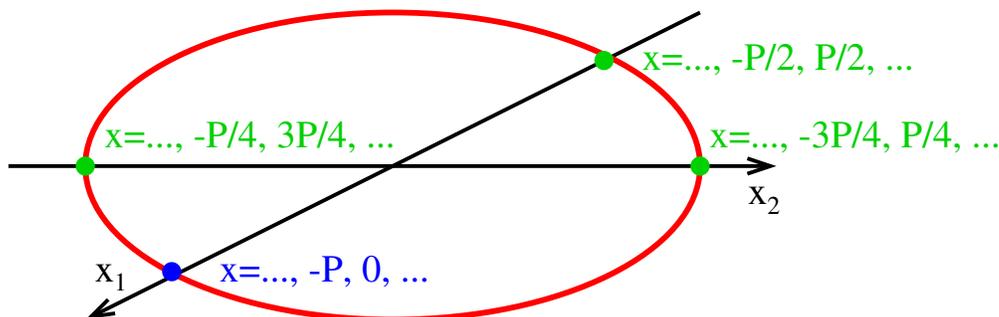


Abbildung 3.11: Rot: Metallring in der (x_1, x_2) -Ebene. Blau: Die Stellen $x = \dots, -P, 0, \dots$ werden unter ψ auf den blauen Punkt $(1, 0)$ abgebildet. Analoges gilt für die grünen Punkte.

Satz 3.22 (Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit räumlich periodischer Bedingung). *Wir nehmen an, dass v 2π -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Die folgenden Aussagen sind wahr:*

(i) Für jedes $t \in [0, \infty)$ und $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge

$$\left(\sum_{k=-N}^N \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \right)_{N \in \mathbb{N}_0}.$$

Wir definieren die Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$u(t, x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx}. \quad (3.31)$$

- (ii) Die Funktion u ist räumlich 2π -periodisch, d. h., sie löst (3.30) mit $P = 2\pi$.
- (iii) Die Funktion u ist stetig.
- (iv) Die Funktion u ist auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ glatt, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar.
- (v) Die Funktion u löst die WLG (3.28) (mit $a = 1$) auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Sie erfüllt die Anfangsbedingung (3.29).
- (vi) (Eindeutigkeit) Sei $\tilde{u} : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist, dort die WLG (3.28) löst, die Anfangsbedingung (3.29) erfüllt und räumlich 2π -periodisch ist. Dann gilt

$$\tilde{u} = u, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{u}(t, x) = u(t, x), \quad \forall t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. [Wärmeleitungsgleichung] Falls v reelle Werte annimmt, dann gilt dasselbe für die räumlich periodische Lösung u der WLK mit Anfangsbedingung v . (Warum?) Daher ist die physikalische Anwendung auf die Temperaturverteilung in einem Metallring sinnvoll.

Wir betrachten ein physikalisches System, das durch die räumlich eindimensionale WLK mit periodischen Bedingungen beschrieben werden kann, zum Beispiel die Temperaturverteilung in einem dünnen Metallring oder Diffusion in einem dünnen ringförmigen Behälter. Satz 3.22 impliziert dann, dass die Zeitentwicklung des Systems vollständig durch die Anfangsbedingung festgelegt wird. Mit Hilfe dieses Satzes erreichen wir also folgendes Ziel der Physik für Phänomene, die durch die räumlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden können:

Ziel. *Bestimme die zukünftige Entwicklung eines physikalischen Systems in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems.*

Ein System, für welches die zukünftige Entwicklung durch den gegenwärtigen Zustand bestimmt wird, heisst *deterministisch*. Satz 3.22 liefert also eine deterministische Beschreibung von Wärmeleitungs- und Diffusionsprozessen.

Bemerkung. Das ist analog zur Tatsache, dass der Satz 2.2 (d'Alembertsche Formel) eine deterministische Beschreibung ebener Wellen liefert.

Beweis des Satzes 3.22: Die Aussagen (i,iii,iv) folgen aus Theorie, die in der Analysis behandelt wird.

Die Aussage (ii) folgt aus der Formel (3.31).

(v): WLK (3.28): Für jede Zahl $k \in \mathbb{Z}$ löst die Funktion $(t, x) \mapsto e^{-k^2t+ikx}$ die WLK. (Überprüfen Sie das!¹⁷) Weil diese PDG linear ist, folgt darum mit Hilfe des Superpositionsprinzips, dass für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $(t, x) \mapsto \sum_{k=-N}^N \widehat{v}_k e^{-k^2t+ikx}$ die WLK löst. Da u der punktweise Grenzwert dieser Folge von Funktionen ist, folgt mit Hilfe von Analysis, dass u die WLK löst.

Anfangsbedingung (3.29): Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) konvergiert die Folge $\left(\sum_{k=-N}^N \widehat{v}_k e^{ikx}\right)_{N \in \mathbb{N}_0}$ gegen $v(x)$. Mittels der Definition (3.31) von u folgt daraus, dass $u(0, x) = v(x)$. Also erfüllt u die Anfangsbedingung (3.29). Das beweist (v).

¹⁷Diese Lösung der WLK hatten wir schon mit Hilfe der Trennung der Variablen gefunden, siehe (1.27).

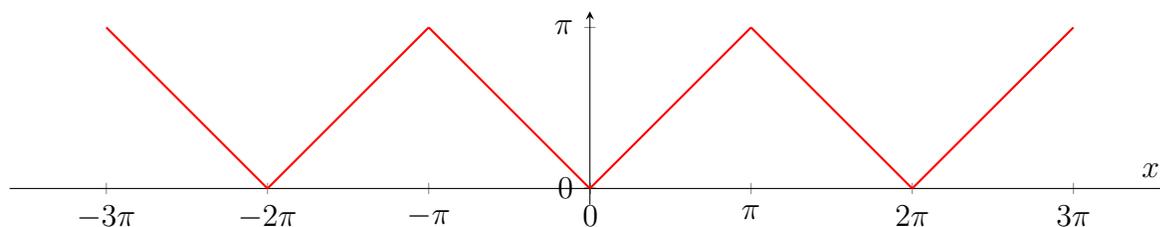


Abbildung 3.12: Die Funktion v .

Aussage (vi) folgt aus [Wid75, Chapter V, Section 8 Fourier's ring, Theorem 8, p. 100].□

Beispiel 3.23. [Wärmeleitungsgleichung] Wir definieren $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die Zickzackfunktion, d. h. die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$[-\pi, \pi) \ni x \mapsto |x|.$$

Siehe Abbildung 3.12. Um das Anfangswertproblem für die WLГ mit räumlich periodischer Bedingung zu lösen, erinnern wir uns, dass die Fourierkoeffizienten von v gemäss Übungsserie 5 (Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der Zickzackfunktion) gegeben sind durch

$$\widehat{v}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } 0 \neq k \text{ gerade,} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch (3.31), also

$$\begin{aligned} u(t, x) &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-0^2 t + i \cdot 0 \cdot x} - \sum_{k \in \mathbb{N}: k \text{ ungerade}} \frac{2}{\pi k^2} e^{-k^2 t} (e^{ikx} + e^{i(-k)x}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k \in \mathbb{N}: k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k^2} e^{-k^2 t} \cos(kx) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(e^{-t} \cos(x) + \frac{e^{-9t} \cos(3x)}{9} + \frac{e^{-25t} \cos(5x)}{25} + \dots \right). \quad (3.33)$$

Aus dem Satz 3.22 folgt, dass u die eindeutige räumlich 2π -periodische Lösung der WLГ ist, welche die Anfangsbedingung (3.29), also $u(0, x) = v(x)$, erfüllt. Siehe Abbildung 3.13. Im physikalischen Beispiel eines Metallrings wird die Temperatur zu einem Zeitpunkt $t > 0$ im Punkt (x_1, x_2) daher durch $u(t, x)$ gegeben, wobei

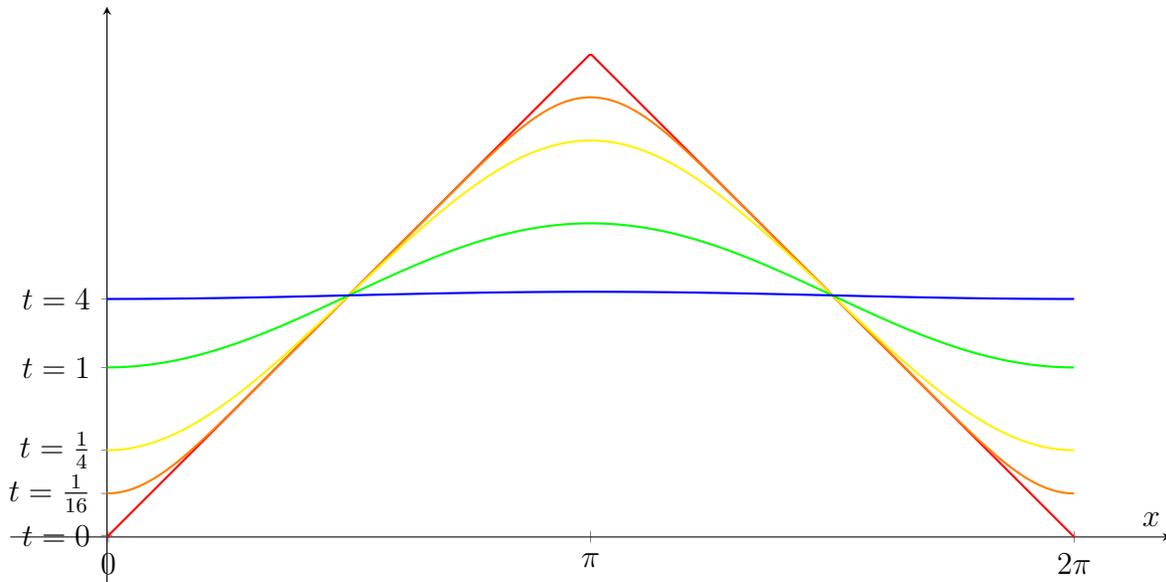


Abbildung 3.13: Die räumlich periodische Lösung u der WLG zur Anfangsbedingung $u(0, x) = v(x)$, zu den Zeiten $t = 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4$.

$\psi(x) = (\cos(x), \sin(x)) = (x_1, x_2)$. Zum Beispiel erhalten wir aus (3.33):

$$\begin{aligned} &\text{Temperatur zum Zeitpunkt } t = 1 \text{ im Punkt } (x_1, x_2) = (1, 0) \\ &= u(1, 0) \approx 1.1 \end{aligned}$$

Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung und ihrer Lösungen: Abfallen der Moden, unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, Irreversibilität, ...

Wir beenden diesen Abschnitt, in dem wir auf einige physikalisch relevante Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung eingehen, wovon ein paar aus Satz 3.22 folgen. Wir gehen auch kurz auf allgemeine parabolische PDG ein.

- (a) (Moden) In der Physik ist eine *Mode* ein Produkt einer Funktion der Zeit und einer Funktion des Orts, welches eine vorgegebene Differentialgleichung erfüllt. Die Funktion

$$u_k(t, x) := \widehat{v}_k e^{-k^2 t} e^{ikx} \quad (3.34)$$

wird in der Physik im Zusammenhang mit der WLG mit Anfangsbedingung $u(0, x) = v(x)$ die k -te *Mode* genannt. Das ist eine Mode im obigen Sinn. Sie ist gleich dem

Produkt einer exponentiell abfallenden Funktion der Zeit und der k -ten Fouriermode $x \mapsto e^{ikx}$. Gemäss (3.31) ist die räumlich periodische Lösung u des Anfangswertproblems für die WLK durch die Summe der Moden u_k ($k \in \mathbb{Z}$) gegeben.

- (b) (Abfallen der Moden) Bei festem x fällt für $k \neq 0$ die Funktion $t \mapsto u_k(t, x)$ exponentiell ab, mit der Abnahmerate k^2 . Daher spielen in der Praxis innert kurzer Zeit nur noch die Moden mit kleinem $|k|$ eine Rolle. Die anderen Moden können vernachlässigt werden. Um das zu illustrieren, betrachten wir das Beispiel 3.23. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren

$$C := \sum_{1 \neq k \in \mathbb{N}: k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k^2},$$

$$t_0 := -\frac{\log \frac{\varepsilon}{C}}{8}.^{18} \tag{3.35}$$

Sei $t \geq t_0$. Analog zu (3.32) haben wir

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \neq -1, 0, 1} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx} \right| &= \left| - \sum_{1 \neq k \in \mathbb{N}: k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k^2} e^{-k^2 t} \cos(kx) \right| \\ &< e^{-9t} \sum_{1 \neq k \in \mathbb{N}: k \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi k^2} \quad (\text{Warum?}) \\ &\leq e^{-8t_0} C e^{-t} \\ &= \varepsilon e^{-t} \quad (\text{wegen (3.35)}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Das bedeutet, dass die Moden mit $|k| > 1$ insgesamt weniger als εe^{-t} zur Lösung $u(t, x)$ beitragen. Da die erste und minus erste Mode zusammen durch die Funktion $(t, x) \mapsto -\frac{4}{\pi} e^{-t} \cos(x)$ gegeben sind, “dominieren” diese beiden Moden für ein kleines ε also die anderen Moden. Die Konstante C ist gegeben durch

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \approx 0.30.^{19}$$

Für $\varepsilon := 10^{-3}$ zum Beispiel ergibt sich somit gemäss (3.35) $t_0 < 0.72$. Gemäss (3.36) tragen für $t \geq 0.72$ die Moden mit $|k| > 1$ insgesamt also weniger als einen Tausendstel mal e^{-t} zu $u(t, x)$ bei. In guter Näherung ist u dann also gegeben durch die Summe der nullten, ersten und minus ersten Mode, also durch

$$u(t, x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} e^{-t} \cos(x).$$

¹⁸In der Mathematik bezeichnet \log den natürlichen Logarithmus, der die Eulersche Zahl e als Basis hat.

¹⁹Das folgt aus der Lösung des Basler Problems, welche besagt, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- (c) (asymptotisches Verhalten der Lösung) Aus (3.31) folgt, dass die Lösung u an jeder Stelle x gegen \widehat{v}_0 , also den Mittelwert der Anfangsfunktion v , konvergiert, wenn t gegen unendlich geht, d. h.

$$u(t, x) \rightarrow \widehat{v}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) dx, \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Das bedeutet, dass sich Unterschiede in der Temperaturverteilung schliesslich ausgleichen.

- (d) (Glattheit der Lösung) Wegen Satz 3.22(iv) ist die Lösung u auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ (also für $t > 0$) glatt, selbst wenn die Anfangsfunktion v nur stetig ist. Die Wärmeleitungsgleichung glättet also die Anfangsfunktion instantan. Die Zickzackfunktion ist zum Beispiel nicht überall differenzierbar. (Wo nicht?) Die Lösung u mit dieser Anfangsfunktion ist jedoch instantan glatt. Siehe Beispiel 3.23.

Im Gegensatz dazu glättet die Wellengleichung die Anfangsfunktion u_0 nicht. Das folgt aus der d'Alembertschen Formel, Satz 2.2.

- (e) (unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) Für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ hängt der Wert von u an der Stelle (t, x) von den Werten der Anfangsfunktion v auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ab. Die Fourierkoeffizienten von v kommen nämlich in der Lösungsformel (3.31) für u vor. Diese Koeffizienten hängen von den Werten von v auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ab, da wir sie mittels Integration über dieses Intervall erhalten. Da v 2π -periodisch ist, folgt daraus, dass der Wert von u an der Stelle (t, x) von der *ganzen* Funktion v abhängt. Ein Wärmesignal, das zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem Punkt x ausgesendet wird, wird daher sofort (für $t > 0$) überall empfangen. Es breitet sich also unendlich schnell aus. Das ist physikalisch unmöglich, da gemäss der speziellen Relativitätstheorie keine Information schneller als das Licht übertragen werden kann. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt reale Prozesse daher nur näherungsweise.

Im Gegensatz dazu breitet sich ein Wellensignal mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c aus. In einer Dimension folgt das aus der d'Alembertschen Formel, Satz 2.2.

- (f) (Zeitumkehrinvarianz in der Physik, Irreversibilität der Wärmeleitungsgleichung) Die meisten grundlegenden physikalische Gesetze sind invariant unter Zeitumkehr, d. h., sie bleiben gleich, wenn wir die Zeit umkehren. Um das zu präzisieren, nehmen wir an, dass das Gesetz durch eine partielle Differentialgleichung für eine Funktion u der Zeit t und des Ortes x beschrieben wird. Wir nennen die PDG *strikt zeitumkehrinvariant* (oder *strikt reversibel*), falls für jede Lösung u der PDG die zeitumgekehrte Funktion $(\tilde{t}, x) \mapsto u(-\tilde{t}, x)$ die PDG ebenfalls löst.

Beispiele für strikt zeitumkehrinvariante Gesetze sind das zweite Newtonsche Gesetz ($\mathbf{F} = ma$) für ein konservatives Kraftfeld und die Wellengleichung. (Überprüfen Sie das!) Das ist intuitiv klar, da wir nicht entscheiden können, ob ein Video, das die Bewegung eines starren Körpers ohne Reibung oder die Ausbreitung einer Druckwelle zeigt, vorwärts oder rückwärts abgespielt wird. Prozesse, die durch das zweite Newtonsche Gesetz für ein konservatives Kraftfeld oder die Wellengleichung beschrieben werden, sind daher *reversibel*, d. h. zeitlich umkehrbar.

Wir betrachten jetzt eine homogene lineare Evolutionsgleichung der Form

$$u_t(t, \cdot) = L(u(t, \cdot)), \quad \forall t. \quad (3.37)$$

(Die allgemeine Form einer linearen Evolutionsgleichung ist durch (2.38) gegeben.) Eine PDG dieser Form ist *nicht* strikt zeitumkehrinvariant, falls es eine Lösung u der PDG gibt, für welche $L(u(t=0, \cdot)) \neq 0$. Um das zu sehen, wählen wir ein solches u . Wir definieren

$$\tilde{u}(\tilde{t}, x) := u(-\tilde{t}, x).$$

Es gilt

$$\tilde{u}_{\tilde{t}}(0, \cdot) = -u_t(0, \cdot) = -L(u(0, \cdot)) = \tilde{u}(0, \cdot) \neq L(\tilde{u}(0, \cdot)).$$

Also ist die PDG nicht strikt zeitumkehrinvariant. Beispiele für PDG der Form (3.37), für welche ein solches u existiert, sind die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a\Delta u$$

und die Schrödingergleichung mit zeitunabhängiger potentieller Energie,

$$u_t(t, \cdot) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(u(t, \cdot)). \quad (3.38)$$

(\mathcal{H} ist der Hamiltonoperator.) Diese PDG sind also nicht *strikt* zeitumkehrinvariant. Für die WLГ ist das intuitiv klar, da wir einfach entscheiden können, ob ein Video, das einen Diffusionsprozess zeigt, vorwärts oder rückwärts abgespielt wird.

In der Physik bedeutet *Zeitumkehrinvarianz* (oder *Reversibilität*) allerdings etwas Schwächeres als *strikte* Zeitumkehrinvarianz, nämlich, dass für jede Lösung u der gegebenen PDG die zeitumgekehrte Funktion $(\tilde{t}, x) \mapsto u(-\tilde{t}, x)$ die PDG ebenfalls löst, nachdem wir die zeitumgekehrte Funktion möglicherweise geeignet abgeändert haben.²⁰ Zeitumkehrinvariant, aber nicht strikt zeitumkehrinvariant, sind zum Beispiel die Maxwellgleichungen zusammen mit dem Lorentzkraftgesetz, welche zusammen die klassische Elektrodynamik beschreiben. Hierbei ändern wir

²⁰Welche Abänderungen wir erlauben, müssten wir noch präzisieren. Es geht hier jedoch nur um ein intuitives Verständnis.

die zeitunggekehrte Funktion ab, indem wir das Vorzeichen des magnetischen Feldes wechseln. Ein weiteres Beispiel ist die Schrödingergleichung (3.38). Diese PDG ist zeitungkehrinvariant. Hierbei ändern wir die zeitunggekehrte (Wellen-)funktion ab, indem wir sie komplex konjugieren. (Siehe Übungsserie 6.)

Die *Wärmeleitungsgleichung* mit 2π -periodischen Bedingungen ist *nicht zeitungkehrinvariant*, genauer gesagt, gibt es keine Abbildung F vom Vektorraum V der 2π -periodischen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf sich selber, sodass gilt:

$$\begin{aligned} u \text{ löst die WL}G &\implies \tilde{u}(\tilde{t}, x) := (F(u(-\tilde{t}, \cdot)))(x) \text{ löst die WL}G, \\ F(av) &= aF(v), \quad \forall a \in \mathbb{R}, v \in V, \\ \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} &: F(e^{ik\cdot}) \neq 0. \end{aligned}$$

(Wir lassen also zu, dass die zeitunggekehrte Funktion mittels einer solchen Abbildung $F \neq 0$ abgeändert wird.) Das folgt mit Hilfe der Fourierreihenentwicklung der Funktion $F(e^{ik\cdot})$, genauer, mit Hilfe des Satzes 3.20. Prozesse, die durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden, sind daher *irreversibel*, d. h. zeitlich nicht umkehrbar.

Das ist ein Paradox²¹, da wir zum Beispiel die Diffusionsgleichung aus dem Gesetz von Fick hergeleitet haben. Dieses Gesetz kann aus den mikroskopischen Bewegungen von Teilchen hergeleitet werden, die das zweite Newtonsche Gesetz erfüllen, welches reversibel ist. Die Irreversibilität kommt durch den Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Beschreibung zustande.

Die Funktion u löst die WL G $u_t = a\Delta u$ genau dann, wenn $\tilde{u}(\tilde{t}, x) := u(-\tilde{t}, x)$ die *zeitumgekehrte WL G*

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = -a\Delta\tilde{u} \tag{3.39}$$

löst. (Rechnen Sie das nach!) Das ist die WL G mit Temperaturleitfähigkeit $-a < 0$. Seien jetzt $t_0 < t_1$ eine reelle Zahl und $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, die nicht glatt ist. Aus Bemerkung (d) (Glattheit der Lösung) folgt, dass es keine 2π -periodische stetige Funktion u auf $(t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ gibt, die auf dem Gebiet $(t_0, t_1) \times \mathbb{R}$ die WL G $u_t = a\Delta u$ mit $a > 0$ löst und die Endbedingung $u(t_1, x) = v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllt. Das bedeutet, dass wir die Wärmeleitungsgleichung nicht rückwärts in der Zeit lösen können, sondern nur vorwärts. Das Anfangswertproblem für die zeitunggekehrte WL G (3.39) ist also im Allgemeinen nicht lösbar, nicht einmal für kurze Zeit. Der philosophische Grund dafür ist, dass die Lösung der zeitunggekehrten WL G mit $a = 1$ und Anfangsbedingung $\tilde{u}(0, x) = v(x)$ formal analog zum Satz

²¹Ein Paradox ist eine scheinbare widersprüchliche Situation, die gegen unsere Intuition geht. Es ist also nicht dasselbe wie ein Widerspruch.

3.22 durch die unendliche Summe

$$\tilde{u}(\tilde{t}, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k(\tilde{t}, x)$$

gegeben ist, wobei die k -te Mode durch

$$\tilde{u}_k(\tilde{t}, x) := \hat{v}_k e^{k^2 \tilde{t} + ikx}$$

gegeben ist. Diese Summe stimmt mit der Lösung u der WLK gegeben durch die Formel (3.31) bis auf ein Vorzeichen im Exponenten vor k^2 überein. Die k -te Mode \tilde{u}_k wächst exponentiell mit Wachstumsrate k^2 . Diese Rate nimmt schnell zu, wenn k grösser wird. Grosse Indizes k sorgen daher dafür, dass die Lösung innert kurzer Zeit (manchmal instantan) explodiert und daher zu existieren aufhört.

Kleine Unregelmässigkeiten der Anfangsfunktion werden also bei der zeitumgekehrten WLK sehr schnell aufgeblasen. Das bildet einen Kontrast zur Tatsache, dass die WLK selber Unregelmässigkeiten sehr schnell ausgleicht. Das Vorzeichen der Konstante a in der WLK spielt also eine entscheidende Rolle!

- (g) (Interpretation als gewöhnliche DG) Formal können wir die WLK auffassen als die gewöhnliche DG erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}U(t) = \Delta(U(t))$$

für die Funktion

$$U : [0, \infty) \rightarrow \{2\pi\text{-periodische Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C}\}.$$

Dabei spielt $U(t)$ die Rolle der Funktion $u(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. u löst die WLK nämlich g. d. w.

$$\frac{d}{dt}U(t) = u_t(t, \cdot) = \Delta u(t, \cdot) = \Delta(U(t)).$$

(Im Fall $n = 1$ haben wir $\Delta u = u_{xx}$.) Die Anfangsbedingung (3.29) bedeutet, dass $U(0) = v$. Für eine gewöhnliche DG in \mathbb{R}^n mit vorgegebener Anfangsbedingung besteht wegen des Satzes von Picard-Lindelöf für kurze Zeit eine eindeutige Lösung. (Siehe [Str, Satz 6.5.1, p. 145].) Analog impliziert der Satz 3.22, dass die WLK bei vorgegebener Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung hat (sogar für alle positiven Zeiten).²² Das verleiht unserer Interpretation der WLK als eine gewöhnliche DG eine gewisse Berechtigung. Wir können die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der WLK jedoch nicht aus dem Satz von Picard-Lindelöf herleiten, weil die Menge, in der U Werte annimmt, nicht gleich \mathbb{R}^n ist, sondern ein *uneindlich*-dimensionaler Vektorraum.

²²Es gibt übrigens andere Evolutionsgleichungen, für welche das nicht stimmt.

- (h) (Umformulierung der WLG als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Fourierkoeffizienten) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische stetig differenzierbare Funktion und $k \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe partieller Integration haben wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(f(x) e^{-ikx} \Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx \right) \\ &= 0 + ik \widehat{f}_k.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Daraus folgt, dass

$$\widehat{f}''_k = -k^2 \widehat{f}_k,\tag{3.41}$$

falls f zweimal stetig differenzierbar ist. Sei jetzt $u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, sodass $u^t := u(t, \cdot)$ 2π -periodisch ist für jedes $t > 0$. Aus (3.41) folgt, dass u die WLG genau dann löst, falls

$$\frac{d}{dt} \widehat{u}^t_k = -k^2 \widehat{u}^t_k, \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.\tag{3.42}$$

Wenn nämlich $u_t = u_{xx}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \widehat{u}^t_k &= \widehat{\partial_t u^t}_k \quad (\text{Wir leiten hier unter dem Integral ab.}) \\ &= \widehat{u^t_{xxk}} \\ &= -k^2 \widehat{u}^t_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Umgekehrt, falls $\frac{d}{dt} \widehat{u}^t_k = -k^2 \widehat{u}^t_k$, für jedes $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $u_t = u_{xx}$. (Das folgt aus einer analogen Rechnung.) (3.41) ist ein unendliches System linearer *gewöhnlicher* DG erster Ordnung für die *räumlichen Fourierkoeffizienten* von u . Sei v jetzt eine 2π -periodische, stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann löst u die Anfangsbedingung

$$u^0 = u(0, \cdot) = v$$

genau dann, wenn

$$\widehat{u}^0_k = \widehat{v}_k, \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.\tag{3.43}$$

Das ist ein unendliches System von Anfangsbedingungen für die räumlichen Fourierkoeffizienten von u . Wie zu Beginn dieses Kapitels versprochen²³, haben wir daher das Anfangswertproblem für die WLG als ein System von Anfangswertproblemen für gewöhnliche DG für die räumlichen Fourierkoeffizienten der gesuchten Funktion umgeschrieben!

²³Siehe (3.2).

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.42,3.43) gegeben durch

$$\widehat{u}_k^t = \widehat{v}_k e^{-k^2 t}.$$

Gemäss der Fourierreihenentwicklung (Satz 3.16) ist die eindeutige Lösung der WLK daher gegeben durch

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_k^t e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_k e^{-k^2 t + ikx}.$$

Das stimmt mit der Lösungsformel (3.31) für das Anfangswertproblem für die WLK (Satz 3.22) überein.

Mit der hier beschriebenen Methode können wir eine allgemeine *Evolutionsgleichung mit räumlich konstanten Koeffizienten* als ein System gewöhnlicher DG für die räumlichen Fourierkoeffizienten umschreiben.

- (i) (parabolische PDG) Einige Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung können auf parabolische partielle Differentialgleichungen²⁴ verallgemeinert werden. Zum Beispiel hat das Anfangswertproblem für eine parabolische Gleichung analog zum Satz 3.22 unter gewissen Bedingungen eine eindeutige Lösung. (Siehe zum Beispiel [Eva10, 7.1. Second-order parabolic equations, Theorem 3, p. 378, Theorem 4, p. 379].

Analog zur Bemerkung (g) können wir eine allgemeine Evolutionsgleichung $\partial_t^k u + L(u) = f$ (siehe (2.38)) formal als eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion

$$U : (0, \infty) \rightarrow \{\text{Funktion von } \mathbb{R}^n \text{ nach } \mathbb{C}\}$$

auffassen. Für eine parabolische PDG erhält diese Sichtweise dadurch eine gewisse Berechtigung, dass das Anfangswertproblem für eine parabolische Gleichung eindeutig lösbar ist.

²⁴Siehe Definition 1.6.

Kapitel 4

Fouriertransformation

Die *Fouriertransformierte* einer stückweise stetigen absolut integrierbaren¹ Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\mathcal{F}(f) := \widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx.^2$$

Wir erhalten diese Funktion aus den Fourierkoeffizienten bestimmter *periodischer* Funktionen durch den Grenzübergang, in dem wir die Periode gegen unendlich gehen lassen. Um das zu erklären, sei $\xi \in \mathbb{R}$. Für jedes $P \in (0, \infty)$ schreiben wir

$f|P :=$ periodische Fortsetzung der Einschränkung von f auf das Intervall $\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$.

$\widehat{f}(\xi)$, die Fouriertransformierte von f an der Stelle ξ , ist der Grenzwert für $P \rightarrow \infty$ von P mal dem k -ten Fourierkoeffizienten von $f|P$, wobei $k := \frac{P\xi}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, also

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{P \rightarrow \infty: k := \frac{P\xi}{2\pi} \in \mathbb{Z}} \left(P \widehat{f|P}_k = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x)e^{-ik\omega x} dx \right).$$

(P ist die Periode der Funktion $f|P$ und $\omega := \frac{2\pi}{P}$.) Im obigen Limes erlauben wir nur P , für welches $k := \frac{P\xi}{2\pi}$ eine ganze Zahl ist. Das brauchen wir, damit der k -te Fourierkoeffizient von $f|P$ wohldefiniert, also sinnvoll, ist.

¹Siehe Definition 4.3 unten.

²In der Vorlesung *Komplexe Analysis* wurde die rechte Seite mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ versehen. Der Vorteil der hier gebrauchten Konvention ist, dass damit in Rechnungen der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ an gewissen Stellen vermieden werden kann und die Rechnungen dadurch übersichtlicher bleiben. Der Vorteil der Konvention der Vorlesung *Komplexe Analysis* ist, dass damit die Fouriertransformation eine unitäre Abbildung ist. Das bedeutet, dass sie das L^2 -Skalarprodukt erhält (Satz von Plancherel) und surjektiv ist (von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). Siehe [AIJ24, Satz 4.45, S. 151].

Im Gegensatz zu den Fourierkoeffizienten ist die Fouriertransformation für Funktionen definiert, die nicht periodisch sein müssen. Die *Fouriertransformation* ist die Abbildung

$$\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f).$$

Diese Abbildung ist analog zur *Fourierkoeffizientenabbildung*. Damit meinen wir die Abbildung, die einer periodischen Funktion die Folge ihrer Fourierkoeffizienten zuordnet, d. h. die Abbildung

$$f \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}(f) := (\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}.^3$$

Die *Fourier-Rücktransformierte* einer stückweise stetigen absolut integrierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\mathcal{F}^*(g) := \check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \check{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Die *Fourier-Rücktransformation* ist die Abbildung $\mathcal{F}^* : g \mapsto \mathcal{F}^*(g)$. Diese Abbildung stimmt bis auf einen Faktor $\frac{1}{2\pi}$ und das Vorzeichen im Exponenten des Integranden mit der Fouriertransformation \mathcal{F} überein. Die Fourier-Rücktransformierte der Fouriertransformierten einer Funktion f ist wieder die Funktion f , d. h.

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = \check{\check{f}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot} d\xi = f. \quad (4.1)$$

Heuristisch bedeutet das, dass wir die Funktion f durch die “kontinuierliche Summe”, also das Integral, ihrer “kontinuierlichen Fouriermoden”⁴ $\widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot}$ darstellen können. Das ist analog zur Tatsache, dass eine 2π -periodische⁵ Funktion f durch ihre Fourierreihe, also durch die unendliche Summe ihrer Fouriermoden, dargestellt wird, d. h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik \cdot} = f. \quad (4.2)$$

(Siehe Satz 3.16 (punktweise Fourierreihenentwicklung) und Satz 3.20.) Die Fourier-Rücktransformation \mathcal{F}^* spielt dabei die Rolle der Abbildung

$$(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}^*}((c_k)_{k \in \mathbb{Z}}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \cdot}.$$

³Wir gebrauchen hier das Wort *Folge* in einer etwas allgemeineren Bedeutung als ursprünglich, da der Folgenindex k hier auch negative Werte annehmen darf.

⁴Die Variable ξ spielt die Rolle des Indexes k des k -ten Fourierkoeffizienten. Da ξ “kontinuierliche Werte”, also Werte in \mathbb{R} annimmt, sprechen wir von “kontinuierlichen Fouriermoden”.

⁵stetige und stückweise stetig differenzierbare

Damit können wir nämlich die Fourierreihenentwicklung (4.2) schreiben als

$$\widetilde{\mathcal{F}}^*(\widetilde{\mathcal{F}}(f)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} = f,$$

was analog zu (4.1) ist. Die Fouriertransformation übersetzt die Ableitung in Multiplikation mit $i\xi$ und damit lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen und gewisse *partielle* DG⁶ in entkoppelte Systeme *gewöhnlicher* DG.⁷ Damit vereinfacht sie PDG. Das ist analog zur Tatsache, dass die Fourierkoeffizientenabbildung die Ableitung in Multiplikation mit ik übersetzt. (Siehe Bemerkung 3.3(h).) Wir werden die genannte Übersetzungseigenschaft der Fouriertransformation gebrauchen, um die Wärmeleitungsgleichung (*ohne* periodische Bedingungen) zu lösen.

In physikalischen Anwendungen wird eine Funktion der *Ortsvariable* x mittels der “kontinuierlichen Summe” (4.1) in ihre “kontinuierlichen Fouriermoden” zerlegt. Zum Beispiel wird in der *Theorie der Wellen* und in der *Quantenmechanik* eine Welle (oder Wellenfunktion) f zu einem festen Zeitpunkt als eine Funktion der Ortsvariable x aufgefasst und als eine unendliche (“kontinuierliche”) Überlagerung der komplexen Kosinus-Sinuswellen $x \mapsto \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) geschrieben. Die Variable ξ spielt dabei die Rolle des Wellenvektors \vec{k} .⁸ (Die Norm des Wellenvektors ist die (Kreis-)wellenzahl.)

In anderen physikalischen Anwendungen wird eine Funktion der *Zeitvariable* t mittels der “kontinuierlichen Summe” (4.1) in ihre “kontinuierlichen Fouriermoden” zerlegt. Zum Beispiel wird in der *Spektroskopie* das elektromagnetische Feld $f = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ an einem festen Ort als eine Funktion der Zeitvariable t aufgefasst und als eine unendliche (“kontinuierliche”) Überlagerung der komplexen Kosinus-Sinuswellen $t \mapsto \widehat{f}(\xi)e^{i\xi t}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) geschrieben. (In diesem Fall hat die Funktion f sechs Komponenten, nämlich drei elektrische, E^i , $i = 1, 2, 3$, und drei magnetische, B^i , $i = 1, 2, 3$. Spektroskopie dient unter anderem dazu, elektromagnetische Strahlung, zum Beispiel Licht, zu analysieren.)

Die Variable ξ spielt dabei die Rolle der Kreisfrequenz (= Winkelgeschwindigkeit) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ($T = \text{Periode}$). Sie entspricht einer Wellenlänge und damit einer Farbe. Das Quadrat der Norm des Vektors $\widehat{f}(\xi = \omega)$ ist in diesem Fall proportional zur Frequenzdichte der Intensität (\approx Helligkeit) der Farbe, die der Kreisfrequenz ω entspricht. Die Fouriertransformierte \widehat{f} entspricht in diesem Fall also dem *Spektrum*, d. h. der Intensitätsverteilung der elektromagnetischen Welle. Siehe Abbildung 4.1.

⁶nämlich lineare Evolutionsgleichungen mit raumunabhängigen Koeffizienten

⁷Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine GDG. Wir erhalten also ein System von GDG, das durch ξ indiziert wird. Diese GDG sind nicht miteinander verbunden, d. h., sie sind entkoppelt.

⁸Wir betrachten hier nur den eindimensionalen Fall $n = 1$, aber die Fouriertransformation kann auf mehrere Dimensionen verallgemeinert werden.

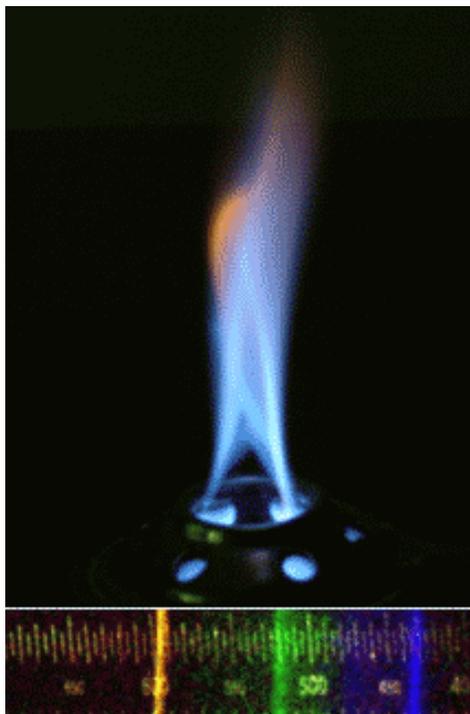


Abbildung 4.1: Spiritusflamme und ihr Spektrum. Die Farben der drei hellen Linien (= Spektrallinien) entsprechen Kreisfrequenzen $\xi = \omega$ mit hoher Frequenzdichte der Intensität (\approx Helligkeit). Quelle: wikipedia.

4.1 Fouriertransformation: Definition und Eigenschaften

Die Fouriertransformierte kann für jede absolut integrierbare Funktion definiert werden. Dieser Begriff beruht auf dem Begriff der uneigentlichen Integrierbarkeit. Diese ist der Inhalt der folgenden Definition. Sei a_0 eine reelle Zahl oder $a_0 = -\infty$, b_0 eine reelle Zahl grösser als a_0 oder $b_0 = \infty$, I ein Intervall mit Endpunkten a_0 und b_0 (zum Beispiel $I = (a_0, b_0)$) und $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige⁹ Funktion.

Definition 4.1 (uneigentliche Integrierbarkeit, uneigentliches Integral). *Wir nennen f uneigentlich integrierbar g. d. w. es eine Zahl $c \in I$ gibt, sodass*

$$\int_a^c f(x)dx \text{ für } a \downarrow a_0 \text{ konvergiert,} \quad (4.3)$$

$$\int_c^b f(x)dx \text{ für } b \uparrow b_0 \text{ konvergiert.} \quad (4.4)$$

⁹Siehe die Definition 3.5.

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx := \lim_{a \downarrow a_0} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \uparrow b_0} \int_c^b f(x) dx, \quad (4.5)$$

wobei c eine beliebige Zahl in I ist.

Bemerkung. Die rechte Seite von (4.5) hängt nicht von der Wahl von c ab.

Beispiele 4.2. [uneigentliche Integrierbarkeit, uneigentliches Integral]

(i) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha < 0$. Wir schreiben

$$\gamma := \alpha + i\beta, \quad a_0 := 0, \quad b_0 := \infty, \quad I := [a_0, b_0) = [0, \infty)$$

und betrachten die Funktion

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := e^{\gamma x}.$$

Wir wählen $c := 0$. Dann ist die Bedingung (4.3) erfüllt, und es gilt

$$\lim_{a \downarrow a_0=0} \int_a^{c=0} f(x) dx = 0.$$

Des Weiteren gilt für jedes $b \in [0, \infty)$, dass

$$\int_{c=0}^b f(x) = \left. \frac{e^{\gamma x}}{\gamma} \right|_{x=0}^b = \frac{e^{\gamma b} - 1}{\gamma}.$$

Weil $|e^{\gamma b}| = |e^{\alpha b}| |e^{i\beta b}| = e^{\alpha b}$ und $\alpha < 0$, konvergiert $e^{\gamma b}$ für $b \rightarrow \infty$ gegen 0. Also ist die Bedingung (4.4) erfüllt. Die Funktion f ist darum uneigentlich integrierbar mit uneigentlichem Integral

$$\int_0^\infty f(x) = -\frac{1}{\gamma}. \quad (4.6)$$

Falls $\alpha \geq 0$, dann konvergiert $e^{\gamma b}$ für $b \rightarrow \infty$ nicht. (Überprüfen Sie das!) In diesem Fall ist f daher nicht uneigentlich integrierbar.

(ii) Wir schreiben

$$a_0 := -\infty, \quad b_0 := \infty, \quad I := (a_0, b_0) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

und betrachten die Funktion

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Wir wählen $c := 0$. Wir haben

$$\arctan'(x) = f(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int_{c=0}^b f(x)dx = \arctan(x)|_{x=0}^b = \arctan(b) - 0.$$

Das konvergiert für $b \rightarrow b_0 := \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Aus einem ähnlichen Grund gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$, dass

$$\int_a^{c=0} f(x)dx = 0 - \arctan a \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ für } a \rightarrow -\infty.$$

Daraus folgt, dass die Funktion f uneigentlich integrierbar ist mit uneigentlichem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \downarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \uparrow \infty} \int_0^b f(x)dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Definition 4.3 (absolute (uneigentliche) Integrierbarkeit). *Wir nennen eine stückweise stetige Funktion f absolut integrierbar g. d. w. die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ uneigentlich integrierbar ist.*

Wir definieren die Menge

$$L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{ \text{absolut integrierbare (stückweise stetige) Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C} \}. \quad (4.7)$$

Bemerkungen 4.4. (i) Die Menge $V := \{ \text{Funktion } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \}$, zusammen mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, ist ein komplexer Vektorraum.

(ii) Die Menge $L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist ein (komplex-)linearer Unterraum von V . Zusammen mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist sie daher ebenfalls ein komplexer Vektorraum.

Sei $f \in L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d. h., f ist absolut integrierbar (und stückweise stetig).

Definition 4.5 (Fouriertransformierte, Fouriertransformation). *Wir definieren die Fouriertransformierte von f als die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch das uneigentliche Integral*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx. \quad (4.8)$$

Wir definieren die Fouriertransformation als die Abbildung

$$\mathcal{F} : L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \{ \text{Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C} \}, \quad \mathcal{F}(f) := \widehat{f}.$$

Bemerkungen. • Aus unserer Annahme, dass f absolut integrierbar ist, folgt, dass die Funktion $f e^{-i\xi \cdot}$ uneigentlich integrierbar ist. Daher ist das uneigentliche Integral (4.8) wohldefiniert, d. h. sinnvoll.

- Die Definition der Fouriertransformierten ist analog zur Definition der Folge der Fourierkoeffizienten (Definition 3.7). Die Variable ξ spielt dabei die Rolle des Indexes k .
- In gewissen Büchern wird die rechte Seite von (4.8) mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ versehen. Siehe Fussnote auf S. 107.

Beispiele 4.6. [Fouriertransformierte]

(i) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < 0$. Wir definieren

$$\gamma := \alpha + i\beta, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ e^{\gamma x}, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist absolut integrierbar. (Warum?) Wegen Beispiel 4.2(i) ist die Fouriertransformierte von f im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{(\gamma - i\xi)x} dx = \frac{1}{-\gamma + i\xi}.$$

(ii) Sei $\alpha < 0$ eine reelle Zahl. Wir definieren

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := e^{\alpha|x|}.$$

Aus dem vorherigen Beispiel folgt, dass diese Funktion absolut integrierbar ist mit Fouriertransformierter gegeben durch

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{(\alpha - i\xi)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-\alpha - i\xi)x} dx = \frac{1}{-\alpha + i\xi} - \frac{1}{\alpha + i\xi} = -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

(Das Integral $\int_{-\infty}^0 e^{(\gamma - i\xi)x} dx$ können wir auf analoge Weise berechnen.)

Satz 4.7 (Fouriertransformation). (i) Für jede Funktion $f \in L^1_{\text{pc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist die Funktion $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ stetig und konvergiert $\widehat{f}(\xi)$ für $\xi \rightarrow \pm\infty$ gegen 0.

(ii) (Linearität) Die Abbildung \mathcal{F} ist linear, d. h.

$$\mathcal{F}(cf) = c\mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g), \quad \forall c \in \mathbb{C}, f, g \in L^1_{\text{pc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

(iii) (Verschiebung) Sei $v \in \mathbb{R}$ und $f \in L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Wir definieren $\tau_v(f)$ als die Funktion gegeben durch

$$\tau_v(f)(x) := f(x - v).$$

Es gilt

$$\widehat{\tau_v(f)} = e^{-iv \cdot} \widehat{f}, \quad \text{d. h.} \quad \widehat{\tau_v(f)}(\xi) = e^{-iv\xi} \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(iv) (Streckung) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $f \in L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Wir definieren $\delta_a(f)$ als die Funktion gegeben durch

$$\delta_a(f)(x) := f\left(\frac{x}{a}\right). \quad (4.9)$$

Es gilt

$$\widehat{\delta_a(f)} = |a| \delta_{\frac{1}{a}}(\widehat{f}), \quad \text{d. h.} \quad \widehat{\delta_a(f)}(\xi) = |a| \widehat{f}(a\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(v) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, sodass die Funktion $\text{id } f$, $(\text{id } f)(x) = xf(x)$, absolut integrierbar ist.¹⁰ Dann ist f auch absolut integrierbar und die Funktion \widehat{f} differenzierbar mit Ableitung

$$\widehat{f}' = -i \text{id } \widehat{f}.$$

(vi) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare und absolut integrierbare Funktion, sodass $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 konvergiert. Dann ist die Fouriertransformierte von f' (überall) wohldefiniert, und es gilt

$$\widehat{f}'(\xi) = i \text{id } \widehat{f}, \quad \text{d. h.} \quad \widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi) \quad \text{für jedes } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Bemerkungen. [Fouriertransformation]

- (ii): Gemäss Bemerkung 4.4 sind die Mengen {Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ } und $L_{\text{pc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Vektorräume. Daher ist die Aussage (ii) sinnvoll.
- (iii): τ_v entspricht einer Verschiebung des Arguments um $-v$. Der Buchstabe τ steht für *Translation*. Teil (iii) des Satzes besagt, dass die Fouriertransformation Verschiebung des Arguments um $-v$ in Multiplikation mit der oszillierenden Phase $\xi \mapsto e^{-i\xi v}$ übersetzt.
- (iv): δ_a entspricht einer Streckung (Dilatation) des Arguments um den Faktor $\frac{1}{a}$. Der Buchstabe δ steht für *Dilatation*. Teil (iv) besagt, dass die Fouriertransformation eine Streckung des Arguments um $\frac{1}{a}$ in Multiplikation mit $|a|$ und Streckung des Arguments um a übersetzt.

¹⁰Hierbei bezeichnet $\text{id} := \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) := x$, die Identitätsfunktion.

- Teil (v) besagt, dass die Fouriertransformation Multiplikation mit $-i$ mal die Identitätsfunktion in Ableiten übersetzt. Oft wird die Identitätsfunktion $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) := x$, unpräzise als x geschrieben. Das ist unpräzise, da x eine Variable ist und keine Funktion. In der unpräzisen Schreibweise gilt

$$\widehat{f}' = -i\widehat{x}f.$$

Das bedeutet, dass die Fouriertransformation Multiplikation mit $-i$ mal die Variable (x) in Ableitung übersetzt.

- Die Aussage (vi) bedeutet, dass die Fouriertransformation Ableiten in Multiplikation mit i mal der Variablen (ξ) übersetzt. Fouriertransformation übersetzt daher Analysis (Ableiten) in Algebra (Multiplikation). Das macht sie zu einem starken Werkzeug zum Lösen von Differentialgleichungen. Wir werden die Aussage (vi) zum Beispiel im alternativen Beweis des Satzes 4.16(iii) (p. 128) verwenden. In Bemerkung 3.3(h) haben wir schon eine analoge Eigenschaft der Fourierkoeffizienten gebraucht.
- (vi): Die Formel (4.10) für die Fouriertransformierte der Ableitung ist analog zur Formel (3.40) für die Fourierkoeffizienten der Ableitung. (Die Variable ξ spielt die Rolle des Indexes k .)

Beispiel 4.8. [Fouriertransformierte der Gauß-Funktion] Wir definieren die *Gaußsche Glockenfunktion* (oder *Gauß-Funktion*) als

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.11)$$

Diese Funktion ist nach Carl Friedrich Gauß benannt, siehe Abbildung 4.2. Wir berechnen die Fouriertransformierte dieser Funktion mit Hilfe des Satzes 4.7. Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0) &= \int f(x) dx \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(Das kann mit Hilfe eines zwei-dimensionalen Integrals und Substitution gezeigt werden.) Aus der Kettenregel folgt, dass

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi) - i\widehat{x}f(\xi) & \quad (\text{wegen Satz 4.7(v)}) \\ &= i\widehat{f}'(\xi) \quad (\text{wegen (4.13)}) \\ &= -\xi\widehat{f}(\xi) \quad (\text{wegen Satz 4.7(vi), } \widehat{f}'(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)). \end{aligned}$$



Abbildung 4.2: Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker, 1777–1855.

Das ist eine GDG für \hat{f} . Die eindeutige Lösung dieser Gleichung und der Anfangsbedingung (4.12) ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{d. h.} \quad \hat{f} = \sqrt{2\pi}f. \quad (4.14)$$

Das ist die gesuchte Fouriertransformierte der Gauß-Funktion f . Diese Fouriertransformierte ist also wieder eine Gauß-Funktion, bis auf einen konstanten Faktor.

Bemerkungen. [Fouriertransformierte der gestreckten Gauß-Funktion, Heisenbergsche Unschärferelation]

- Wir können die Fouriertransformierte der Gauß-Funktion auch berechnen, indem wir die Gleichheiten

$$\begin{aligned} x^2 + 2i\xi x &= (x + i\xi)^2 + \xi^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

und (4.12) verwenden. Die Gleichheit (4.15) folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz der Funktionentheorie (= komplexe Analysis). (Siehe [AIJ24, Korollar 2.48, S. 44].)

- Sei $a \in (0, \infty)$. Wir definieren die L^2 -normierte a -reskalierte Gauß-Funktion als

$$\psi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Die Funktion ψ_a ist L^2 -normiert, d. h. ihre L^2 -Norm erfüllt

$$\|\psi_a\| := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx} = 1.$$

Das folgt aus der Tatsache $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ und Substitution. (Überprüfen Sie das!) Um die Fouriertransformierte von ψ_a zu berechnen, definieren wir die Funktion f wie in (4.11) und die Streckung einer Funktion wie in (4.9). Es gilt

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{a}} \delta_a(f). \quad (4.16)$$

Die Fouriertransformierte von $\delta_a(f)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_a(f)} &= a\delta_{\frac{1}{a}}(\widehat{f}) \quad (\text{gemäss Satz 4.7(iv), Streckung}) \\ &= \sqrt{2\pi}a\delta_{\frac{1}{a}}(f) \quad (\text{gemäss (4.14)}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_a} &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{a}} \widehat{\delta_a(f)} \quad (\text{wegen (4.16) und Satz 4.7(ii), Linearität}) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{a}}{\sqrt[4]{\pi}} \delta_{\frac{1}{a}}(f) \quad (\text{wegen (4.17)}) \\ &= \sqrt{2\pi}\psi_{\frac{1}{a}} \quad (\text{wegen (4.16)}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$ ist die Fouriertransformierte der L^2 -normierten a -reskalierten Gauß-Funktion also gegeben durch die L^2 -normierte $\frac{1}{a}$ -reskalierte Gauß-Funktion.

- Die Zahl a entspricht der Breite der a -reskalierten Gauß-Funktion ψ_a . Genauer gesagt, ist die *Standardabweichung* der Zufallsvariable x bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_a|^2$ gegeben durch $\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Wenn a klein ist, dann ist ψ_a also schmal. Gemäss (4.18) ist dann die Fouriertransformierte $\widehat{\psi_a} = \sqrt{2\pi}\psi_{\frac{1}{a}}$ breit. Das heisst, die Standardabweichung von ξ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{|\widehat{\psi_a}|^2}{2\pi}$, also $\sigma_\xi = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, ist gross. Wenn umgekehrt a gross ist, dann ist ψ_a breit und $\widehat{\psi_a}$ schmal.
- In der Quantenmechanik ist ψ_a die (zeitunabhängige) Wellenfunktion, die ein Wellenpaket im Ortsraum beschreibt. Die Fouriertransformierte $\widehat{\psi_a}$ stellt die Wellenfunktion im Impulsraum dar¹¹. Ein schmales ψ_a entspricht einem räumlich

¹¹bis auf einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ und einen Koordinatenwechsel von $k = \xi$ zu $p = \hbar k$. Hierbei ist $\hbar \approx 1.1 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum.

lokalisierten Wellenpaket. Ein solches Wellenpaket ist im Impulsraum breit verteilt. Umgekehrt ist ein im Ortsraum breit verteiltes Gaußsches Wellenpaket im Impulsraum lokalisiert. Das widerspiegelt die *Heisenbergsche Unschärferelation*, die besagt, dass

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2},$$

wobei σ_x die Standardabweichung des Ortes, σ_p die Standardabweichung des Impulses und \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. (Siehe die Vorlesung *Physics II* für ITET.) Für die L^2 -normierte und a -reskalierte Gauß-Funktion ψ_a ist die Heisenbergsche Unschärferelation scharf, d. h., für ψ_a gilt die Gleichheit $\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}$. Für ψ_a gilt nämlich $\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\sigma_p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}$. Wir verwenden hierbei, dass $\sigma_p = \hbar \sigma_k$, wobei σ_k die Standardabweichung des eindimensionalen Wellenvektors $k = \xi$ bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{|\psi_a|^2}{2\pi}$ ist.

4.2 Die Fourier-Rücktransformation

Sei $g \in L^1_{\text{pc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Das bedeutet, dass $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare (und stückweise stetige) Funktion ist. (Siehe Definition 4.3.)

Definition 4.9 (Fourier-Rücktransformierte, Fourier-Rücktransformation). *Wir definieren die Fourier-Rücktransformierte von g (oder inverse Fourier-Transformierte von g) als die Funktion $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch das uneigentliche Integral*

$$\check{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (4.19)$$

Wir definieren die Fourier-Rücktransformation (oder inverse Fourier-Transformation) als die Abbildung

$$\mathcal{F}^* : L^1_{\text{pc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \{\text{Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C}\}, \quad \mathcal{F}^*(g) := \check{g}.$$

Bemerkungen 4.10. [Fourier-Rücktransformation]

- (i) Aus unserer Annahme, dass g absolut integrierbar ist, folgt, dass die Funktion $g e^{ix\cdot}$ uneigentlich integrierbar ist. Daher ist das uneigentliche Integral (4.19) wohldefiniert, d. h. sinnvoll.
- (ii) Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ schreiben wir $\bar{z} = x - iy$ für die komplex Konjugierte von z . Für jede Funktion $g \in L^1_{\text{pc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt, dass

$$\mathcal{F}^*(g) = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}(\bar{g})}, \quad \text{d. h.} \quad \check{g} = \frac{1}{2\pi} \bar{\check{g}}. \quad (4.20)$$

4.3. WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF \mathbb{R} UND
FOURIERTRANSFORMATION, LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 119

(Überprüfen Sie das!) Daraus folgt, dass für jede Funktion $h \in L^1_{pc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt, dass

$$\widehat{h} = 2\pi \overline{\overline{h}}. \quad (4.21)$$

(Dabei verwenden wir (4.20) mit $g := \overline{h}$.)

Satz 4.11 (Fourier-Rücktransformationsformel). *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, absolut integrierbare Funktion, sodass \widehat{f} absolut integrierbar ist. Dann gilt, dass*

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = \overline{\overline{\widehat{f}}} = f.$$

Beweis: [Fol92, The Fourier Inversion Theorem, p. 218].

Beispiel. [Fourier-Rücktransformationsformel] Sei $\alpha < 0$ eine reelle Zahl. Wir definieren

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := e^{\alpha|x|}, \quad g(\xi) := -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Die Fouriertransformierte von g ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \widehat{\widehat{f}} && \text{(wegen Beispiel 4.6(ii))} \\ &= 2\pi \overline{\overline{\widehat{f}}} && \text{(wegen Bemerkung 4.10(ii), (4.21) mit } h = \widehat{f}\text{)} \\ &= 2\pi \overline{\widehat{f}} && \text{(weil } \widehat{f} = g \text{ reelle Werte annimmt)} \\ &= 2\pi \overline{f} && \text{(wegen Satz 4.11)} \\ &= 2\pi f && \text{(weil } f \text{ reelle Werte annimmt),} \end{aligned}$$

$$\text{d. h.} \quad \widehat{g}(x) = e^{\alpha|x|}.$$

Wir haben daher die Fourier-Transformierte der Funktion g berechnet, ohne ein Integral zu berechnen. (Dabei haben wir verwendet, dass $\widehat{f} = g$. Um \widehat{f} zu bestimmen, hatten wir in Beispiel 4.6(ii) ein Integral berechnet.)

4.3 Anwendungen der Fouriertransformation: Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} ohne periodische Bedingung, lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt lösen wir das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} (ohne periodische Bedingung). Die Lösung ist durch die räumliche *Faltung* des

Wärmeleitungskerns mit der Anfangsfunktion gegeben. Das ist die Aussage des Satzes 4.13. (Siehe unten.) Um diesen Satz zu formulieren, benötigen wir also die folgende Definition.

Definition 4.12 (Wärmeleitungskern). *Wir definieren den Wärmeleitungskern als die Funktion*

$$K : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(t, x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}. \quad (4.22)$$

Bemerkung. Der Wärmeleitungskern K löst die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$. Siehe Übungsserie 6.

Satz 4.13 (Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} (ohne periodische Bedingung)). *Sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion, sodass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon \geq 0$ gibt, sodass*

$$|v(x)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Wir definieren

$$u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x - y)v(y)dy. \quad (4.24)$$

Die folgenden Aussagen sind wahr:

- (i) *Die Funktion u ist wohldefiniert, d. h., das uneigentliche Integral in (4.24) existiert.*
- (ii) *Die Funktion u ist glatt, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar.*
- (iii) *Die Funktion löst das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t = u_{xx} \quad \text{auf dem Gebiet } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

$$u(t, y) \rightarrow v(x) \quad \text{für } (t, y) \rightarrow (0, x), \quad \text{für jede Stetigkeitsstelle}^{12} \text{ } x \text{ von } v. \quad (4.26)$$

- (iv) *(Eindeutigkeit der Lösung) Wir nehmen jetzt an, dass v stetig ist. Sei $T > 0$ und $\tilde{u} : (0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die das Anfangswertproblem für die WLG (4.25, 4.26) löst. Wir nehmen an, dass es reelle Zahlen $a, C \geq 0$ gibt, sodass*

$$|\tilde{u}(t, x)| \leq C e^{ax^2}, \quad \text{für alle } t \in (0, T], x \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Dann gilt

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x), \quad \forall t \in (0, T], x \in \mathbb{R}.$$

¹²Das ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}$, in dem v stetig ist.

Bemerkungen. [Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} , Eindeutigkeit der Lösung]

- Wegen (ii) sind die partiellen Ableitungen u_t, u_{xx} und damit die Aussage (4.25) sinnvoll.
- **(iv):** Die Funktion u (gegeben durch (4.24)) erfüllt die Bedingung (4.27). Die Bedingung bedeutet, dass $u(t, x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht zu stark wächst. Teil (iv) des obigen Satzes besagt, dass u die einzige Lösung des Anfangswertproblems für die WLG (4.25, 4.26) ist, welche diese Bedingung erfüllt.

Wir betrachten ein physikalisches System, das durch die WLG auf \mathbb{R} (ohne periodische Bedingungen) beschrieben werden kann, zum Beispiel die Temperaturverteilung in einem dünnen unendlich langen Metallstab oder Diffusion in einem dünnen unendlich langen geraden Behälter. Satz 4.13 impliziert dann, dass die Zeitentwicklung des Systems vollständig durch die Anfangsbedingung festgelegt wird. Mit Hilfe dieses Satzes erreichen wir also folgendes Ziel der Physik für Phänomene, die durch die Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} beschrieben werden können:

Ziel. *Bestimme die zukünftige Entwicklung eines physikalischen Systems in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems.*

Satz 4.13 liefert also eine deterministische Beschreibung von Wärmeleitungs- und Diffusionsprozessen.

Bemerkung. Das ist analog zur Tatsache, dass Satz 2.2 (d'Alembertsche Formel) eine deterministische Beschreibung ebener Wellen und Satz 3.22 eine deterministische Beschreibung des Wärmeleitungsprozesses in einem dünnen Metallring liefert.

Beispiele. [Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R}]

- Wir betrachten die Anfangsfunktion

$$v := \text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sign}(x) := \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stückweise stetig. Wir überprüfen die Voraussetzung (4.23). Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $C_\varepsilon := 1$. Es gilt

$$|v(x)| \leq 1 \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die Voraussetzung (4.23) ist also erfüllt. Es gelten daher die Aussagen (i-iv) des Satzes 4.13. Seien $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Gemäss Satz 4.13 löst daher die Funktion u wie in (4.24) das Anfangswertproblem (4.25,4.26) für die WLG. Wir berechnen

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \operatorname{sign}(y) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} (I_- + I_+), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$I_- := - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy, \quad I_+ := \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Mit Hilfe der Substitution $z := \frac{x-y}{2\sqrt{t}}$ erhalten wir $y = x - 2\sqrt{t}z$, $dy = -2\sqrt{t}dz$ und

$$\begin{aligned} I_- &= - \int_{\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} (-2\sqrt{t}) dz \\ &= - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} 2\sqrt{t} dz. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit Hilfe der Substitution $z := \frac{y-x}{2\sqrt{t}}$ erhalten wir $y = x + 2\sqrt{t}z$, $dy = 2\sqrt{t}dz$ und

$$I_+ = \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} 2\sqrt{t} dz.$$

Indem wir das mit (4.28,4.29) kombinieren, erhalten wir

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

wobei die *Gaußsche Fehlerfunktion* $\operatorname{erf} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ¹³ definiert ist durch

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

¹³Die Notation erf ist eine Abkürzung von *error function*.

4.3. WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF \mathbb{R} UND
FOURIERTRANSFORMATION, LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 123

Die folgende Rechnung zeigt, dass diese Funktion u tatsächlich die WLГ löst:

$$\begin{aligned}
 u_t &= \operatorname{erf}'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \left(-\frac{x}{2 \cdot 2t^{\frac{3}{2}}}\right) \\
 &= -\frac{e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} x}{4t^{\frac{3}{2}}}, \\
 u_x &= \operatorname{erf}'\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \frac{1}{2\sqrt{t}} \\
 &= \frac{e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}}{2\sqrt{t}}, \\
 u_{xx} &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{t}} \left(-\frac{2x}{4t}\right) \\
 &= u_t \quad (\text{wegen (4.30)}).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Wir zeigen jetzt, dass u tatsächlich die Anfangsbedingung (4.26) löst. Für jedes $x > 0$ haben wir

$$\frac{y}{2\sqrt{t}} \rightarrow \infty \quad \text{für } (t, y) \rightarrow (0, x)$$

und daher

$$u(t, y) = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = 1 = \operatorname{sign}(x) = v(x) \quad \text{für } (t, y) \rightarrow (0, x).$$

Ein analoges Argument zeigt, dass für $x < 0$ ebenfalls gilt, dass

$$u(t, y) \rightarrow v(x) \quad \text{für } (t, y) \rightarrow (0, x).$$

Die Funktion u erfüllt also die Anfangsbedingung (4.26).

- Wir betrachten die Anfangsfunktion

$$v := \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(x) = e^x.$$

Wir überprüfen, dass v die Voraussetzungen des Satzes 4.13 erfüllt. Die Funktion v ist stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$C_\varepsilon := \max \{e^{\varepsilon^{-1}}, 1\}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Falls $\varepsilon^{-1} \leq x$, dann haben wir $x \leq \varepsilon x^2$ und darum

$$|v(x)| = e^x \leq e^{\varepsilon x^2} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon x^2}.$$

Falls $0 \leq x < \varepsilon^{-1}$, dann gilt

$$|v(x)| = e^x \leq e^{\varepsilon^{-1}} \leq C_\varepsilon \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon x^2}.$$

(Wir haben verwendet, dass $1 \leq e^{\varepsilon x^2}$.) Falls $x < 0$, dann haben wir

$$|v(x)| = e^x \leq 1 \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon x^2}.$$

Die Voraussetzung (4.23) ist also in jedem Fall erfüllt. Es gelten daher die Aussagen (i-iv) des Satzes 4.13. Seien $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Gemäss der Formel (4.24) ist die Lösung u des Anfangswertproblems für die WLG (4.25,4.26) im Punkt (t, x) gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x - y) e^y dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + y} dy. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wir verwenden die Substitution

$$z := \frac{y - (x + 2t)}{\sqrt{2t}}, \quad y = \sqrt{2t}z + x + 2t, \quad dy = \sqrt{2t}dz.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} -\frac{(x-y)^2}{4t} + y &= -\frac{z^2}{2} + x + t, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + y} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + x + t} \sqrt{2t} dz \\ &= 2\sqrt{\pi t} e^{x+t}. \end{aligned}$$

(Wir haben verwendet, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$. Das kann mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals und Substitution gezeigt werden.) Indem wir das mit (4.31) kombinieren, erhalten wir

$$u(t, x) = e^{x+t}.$$

Die folgende Rechnungen zeigen, dass diese Funktion u tatsächlich die WLG löst:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= e^{x+t}, \\ u_x(t, x) &= e^{x+t}, \\ \text{also } u_{xx}(t, x) &= e^{x+t} \\ &= u_t(t, x). \end{aligned}$$

Die Funktion u erfüllt tatsächlich die Anfangsbedingung (4.26), da für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t, y) = e^{y+t} \rightarrow e^{x+0} = v(x) \quad \text{für } (t, y) \rightarrow (0, x).$$

4.3. WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF \mathbb{R} UND
FOURIERTRANSFORMATION, LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 125

Beweis von Satz 4.13: Aussagen (i,ii) folgen aus Argumenten analog zu [Fol99, Exercise 44, p. 276].

(iii): Es gilt, dass

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y)v(y)dy && \text{(wegen (4.24))} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t K(t, x-y)v(y)dy \\ &\quad \text{(Das folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz (Masstheorie).)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 K(t, x-y)v(y)dy \\ &\quad \text{(wegen einer Aufgabe aus Übungsserie 6 (Wärmeleitungskern))} \\ &= \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-y)v(y)dy && \text{(Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.)} \\ &= \partial_x^2 u. \end{aligned}$$

Also löst u die WLK. Das beweist (iii).

(iv): [Eva10, Theorem 7, p. 59].

Das beweist Satz 4.13. \square

Bemerkungen 4.14. [Wärmeleitungskern, Normalverteilung, Lösung der WLK als gewichtetes Mittel, Anfangsbedingung, asymptotisches Verhalten, “ δ -Funktion”]

- (i) (Wärmeleitungskern, Normalverteilung) Der Wärmeleitungskern K (gegeben durch (4.22)) ist die Gaußfunktion $f(y) := e^{-\frac{y^2}{2}}$ mit reskaliertem Argument $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$, die wir mittels des Faktors $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$ auch noch so normieren, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x)dx = 1. \tag{4.32}$$

Das folgt mittels der Substitution $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$ aus der Tatsache

$$\int e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

(Rechnen Sie nach, dass (4.32) gilt!) Für ein festes $t > 0$ ist die Funktion $K(t, \bullet)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und

Standardabweichung $\sigma := \sqrt{2t}$. Die Wendepunkte der Funktion $K(t, \cdot)$ befinden sich an den Stellen $\pm\sigma = \pm\sqrt{2t}$.

- (ii) (Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} , gewichtetes Mittel) Gemäss der Formel (4.24) wird die Lösung des Anfangswertproblems für die WLG für $t > 0$ gegeben durch

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x - y)v(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, y - x)v(y)dy. \quad (4.33)$$

(Wir haben hierbei verwendet, dass $K(t, \cdot)$ eine gerade Funktion ist.) Daher wird $u(t, x)$ also durch das *gewichtete Mittel* der Funktion v verschoben um x , mit Gewichtungsfaktor K_t , gegeben. (Wir zentrieren den Gewichtungsfaktor also bei x .)

- (iii) (Anfangsbedingung, asymptotisches Verhalten für $t \downarrow 0$) Wir nehmen an, dass v stetig ist. Gemäss (4.26) (Aussage (iii) des Satzes 4.13) gilt dann für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$u(t, x) \downarrow v(x) \text{ für } t \downarrow 0. \quad (4.34)$$

Heuristische Erklärung dafür: Wenn $t > 0$ kleiner wird, wird der Graph der Funktion K_t immer “schmäler”. Für $t \downarrow 0$ konvergiert K_t heuristisch gegen die “ δ -Funktion”. Diese Funktion ist überall gleich 0 ist, ausser im Punkt 0, wo sie “gleich ∞ ” ist. Ihr Integral ist gleich 1. (Eine solche Funktion gibt es nur heuristisch, nicht mathematisch präzise.)¹⁴ Gemäss Bemerkung (ii) ergibt die Formel (4.33) im Limes $t \downarrow 0$ heuristisch das “Mittel von v mit Gewichtungsfaktor gegeben durch die um x verschobene δ -Funktion”. Dieses “Mittel” ist gerade der Wert von v im Punkt x . D. h. , die Bedingung (4.34) ist erfüllt.

- (iv) (asymptotisches Verhalten für $t \rightarrow \infty$) Auf der anderen Seite wird der Graph der Funktion $K(t, \cdot)$ immer “breiter”, je grösser t wird. Für grosses t ist die Funktion auf einem grossen Intervall um 0 fast konstant. Mit Hilfe von (ii) folgt daraus, dass $K(t, x)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen den Mittelwert der Funktion v konvergiert, falls dieser Mittelwert wohldefiniert ist. Das bedeutet, dass sich Unterschiede in der Temperaturverteilung schliesslich ausgleichen. Das ist analog zum asymptotischen Verhalten der WLG mit periodischer Bedingung. (Siehe Bemerkung (c) auf Seite 100.)

¹⁴Es gibt jedoch die *δ -Distribution*. Das ist ein wohldefiniertes mathematisches Objekt mit Eigenschaften, die den hier beschriebenen Eigenschaften der “ δ -Funktion” entsprechen. Es handelt sich jedoch nicht um eine Funktion. Die Theorie der Distributionen wird im mathematischen Gebiet *Funktionalanalysis* behandelt. Distributionen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

4.3. WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF \mathbb{R} UND
FOURIERTRANSFORMATION, LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 127

- (v) Für die WLK auf \mathbb{R} ohne periodische Bedingungen gelten auch zu (d,e,f) (S. 100) analoge Aussagen (Glattheit der Lösung, unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, Irreversibilität). Insbesondere wird also ein Wärmesignal, das zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem Punkt x ausgesendet wird, sofort (für $t > 0$) überall empfangen. Um das zu verstehen, nehmen wir an, dass das Signal zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die “ δ -Funktion” gegeben ist. Die Lösung der WLK mit dieser Anfangsbedingung ist durch den Wärmeleitungskern K gegeben. Dieser Kern ist sofort (für jedes $t > 0$) überall ungleich 0. Das Signal breitet sich also unendlich schnell aus. Das ist physikalisch unmöglich, da gemäss der speziellen Relativitätstheorie keine Information schneller als das Licht übertragen werden kann. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt reale Prozesse daher nur näherungsweise.

Teil (iii) des Satzes 4.13 besagt, dass die Funktion u , gegeben durch die Formel (4.24), das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung (4.25,4.26) löst. Der obige Beweis davon beruht auf einer direkten Rechnung. Wenn v absolut integrierbar ist, dann folgt das auch mittels Fouriertransformation, nämlich folgendermassen. Wir brauchen dazu die folgende Definition.

Definition 4.15 (Faltung). *Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktionen, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion*

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x - y)g(y) \in \mathbb{C} \tag{4.35}$$

uneigentlich integrierbar ist. Wir definieren die Faltung von f und g als die Funktion

$$f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy. \tag{4.36}$$

Bemerkung. [Faltung] Weil die Funktion (4.35) uneigentlich integrierbar ist, ist die rechte Seite von (4.36) wohldefiniert.

Satz 4.16 (Faltung und Fouriertransformation). *Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktionen, sodass f beschränkt¹⁵ und g absolut integrierbar ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion (4.35) absolut integrierbar.*
- (ii) *Die Faltung $f * g$ ist stetig und beschränkt.*
- (iii) *Falls f auch absolut integrierbar ist, dann ist $f * g$ absolut integrierbar und*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

¹⁵Das bedeutet, dass es eine Konstante $C \geq 0$, sodass $|f(x)| \leq C$, für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen. [Faltung und Fouriertransformation]

- (ii): Wegen (i) ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion (4.35) uneigentlich integrierbar. Die Faltung $f * g$ ist daher sinnvoll.
- (iii): Wegen (ii) ist $f * g$ stetig und daher stückweise stetig. Daher ist die Aussage, dass $f * g$ absolut integrierbar ist, sinnvoll.
- Aussage (iii) bedeutet, dass die Fouriertransformation die Faltung in das gewöhnliche Produkt zweier Funktionen übersetzt.

Beweis des Satzes 4.16: (i): Das folgt aus einem elementaren Argument.

(ii): Siehe [Sch05, 14.8 Theorem (ii), p. 139].

(iii): Siehe [AE09, 9.16 Theorem, p. 218].

Das beweist den Satz 4.16. \square

Alternativer Beweis des Satzes 4.13(iii), falls v absolut integrierbar ist¹⁶: Sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare stückweise stetige Funktion. Wir definieren u wie in (4.24). Wir zeigen, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst. Sei $t \in (0, \infty)$. Wir schreiben

$$u^t := u(t, \bullet), \quad K^t := K(t, \bullet).$$

Wegen (4.24,4.36) ist u^t durch die Faltung

$$u^t = K^t * v \tag{4.37}$$

gegeben. Die Funktion K^t ist beschränkt und absolut integrierbar. Wegen unserer Annahme, dass v absolut integrierbar ist, können wir darum den Satz 4.16(iii) anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{u^t} &= \widehat{K^t * v} && \text{(wegen (4.37))} \\ &= \widehat{K^t} \widehat{v} && \text{(wegen Satz 4.16(iii))} \end{aligned} \tag{4.38}$$

¹⁶ v braucht dann die Bedingung (4.23) nicht zu erfüllen.

4.3. WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG AUF \mathbb{R} UND
FOURIERTRANSFORMATION, LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 129

und für jedes $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}^t(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \frac{\sqrt{2t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-i\sqrt{2t}\xi y} dy \quad (\text{mittels der Substitution } x = \sqrt{2t}y) \\
 &= \frac{\left(f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \widehat{\gamma}(\sqrt{2t}\xi)}{\sqrt{2\pi}} \\
 &= f(\sqrt{2t}\xi) \quad (\text{wegen Beispiel 4.8, (4.14)}) \\
 &= e^{-t\xi^2}.
 \end{aligned}$$

Indem wir das in (4.38) einsetzen, erhalten wir

$$\widehat{u}^t(\xi) = e^{-t\xi^2} \widehat{v}(\xi). \quad (4.39)$$

Wegen unserer Annahme, dass v absolut integrierbar ist, haben wir

$$\begin{aligned}
 \widehat{\partial_t u^t}(\xi) &= \partial_t \widehat{u^t}(\xi) \\
 &= -\xi^2 \widehat{u^t}(\xi) \\
 &= \widehat{(u^t)''} \quad (\text{Satz 4.7(vi) zweimal angewendet}) \\
 &= \widehat{\partial_x \partial_x u^t}(\xi).
 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Wegen Satz 4.11 (Fourier-Rücktransformationsformel) folgt daraus, dass

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad (4.41)$$

d. h., u löst die WLK. Das schliesst den alternativen Beweis des Satzes 4.13(iii) ab. \square

Bemerkungen. [alternativer Beweis des Satzes 4.13(iii)]

- (Fouriermethode zur Lösung einer PDG) Indem wir den alternativen Beweis des Satzes 4.13(iii) in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, finden wir eine heuristische Methode, um eine lineare PDG mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Dazu nehmen wir die räumliche Fouriertransformierte der Gleichung, die wir lösen möchten (in unserem Fall die Gleichung (4.41), $u_t = u_{xx}$). Analog zu (4.40) liefert das eine gewöhnliche DG für die räumliche Fouriertransformierte (in unserem Fall $\frac{d}{dt} \widehat{u^t}(\xi) = -\xi^2 \widehat{u^t}(\xi)$). Wir lösen diese GDG (in unserem Fall (4.39)). Dann nehmen wir die räumliche Fourier-Rücktransformation der

Lösung. Das ergibt eine Lösung der gegebenen PDG (in unserem Fall (4.37)). Im Fall der Wärmeleitungsgleichung ist diese Lösung durch die Faltung des Wärmeleitungskerns mit der Anfangsfunktion gegeben. Der Wärmeleitungskern ist gleich der Fourier-Rücktransformierten der reskalierten Gaußfunktion $\xi \mapsto e^{-t\xi^2}$.

Wir können mit der Fouriermethode zum Beispiel die Wellengleichung lösen. Siehe Übungsserie 8.

- In Bemerkung 3.3(h) haben wir die WLG mit periodischen Bedingungen umgeschrieben als ein System von GDG für die räumlichen Fourierkoeffizienten. Jenes Argument ist analog zum alternativen Beweis des Satzes 4.13(iii).

Kapitel 5

Laplace- und Poissongleichung

Der *Laplace-Operator* Δ (auf \mathbb{R}^n) ist gegeben durch

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Wie in der ersten Vorlesung erwähnt, ist die *Poisson-Gleichung* (oder *inhomogene Laplace-Gleichung*) gegeben durch

$$\Delta u = f, \tag{5.1}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion (die *Inhomogenität*) ist. Die Poissongleichung (5.1) ist der Prototyp einer *elliptischen* linearen PDG zweiter Ordnung. Diese PDG tritt in der Physik und Chemie bei zeitunabhängigen Phänomenen auf. In der Elektrostatik erfüllt zum Beispiel das elektrostatische Potential u die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

wobei ρ die Ladungsdichte und ε_0 die elektrische Feldkonstante ist.¹ Im Fall $f = 0$ wird die Poissongleichung zur (*homogenen*) *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0. \tag{5.2}$$

Diese PDG beschreibt in der Physik und Chemie oft *Gleichgewichtszustände*, zum Beispiel den Gleichgewichtszustand einer diffundierenden chemischen Substanz. Die gesuchte Funktion u ist dann die Stoffmengenkonzentration. Wie wir zu Beginn dieser Vorlesung gesehen haben, beschreibt die *Diffusionsgleichung* (oder *Wärmeleitungsgleichung*)

$$u_t = a\Delta u \tag{5.3}$$

¹Der Faktor $\frac{1}{\varepsilon_0}$ ist eine Konventionssache. Wir können diesen Faktor loswerden, indem wir ihn in ρ absorbieren, also ρ umdefinieren.

nämlich eine zeitlich sich ändernde Stoffmengenkonzentration u . Die Konzentration ist genau dann im Gleichgewicht, wenn sie zeitlich konstant ist, d. h. wenn $u_t \equiv 0$. In diesem Fall wird die Diffusionsgleichung (5.3) zur Laplacegleichung (12).²

Wie wir gesehen haben, brauchen wir für die vollständige Beschreibung eines physikalischen oder chemischen Systems zusätzlich zur PDG auch noch Anfangs- oder Randbedingungen. Dadurch wird die Lösung in guten Fällen eindeutig festgelegt. Im Falle der Wärmeleitungsgleichung auf einem Intervall ist die Lösung zum Beispiel eindeutig festgelegt, wenn wir Dirichlet-Randbedingungen und eine Anfangsbedingung stellen. Das folgt aus dem Satz 3.22.

- Bemerkungen.**
- Statt der Randbedingungen können wir bei der WLГ eine periodische Bedingung stellen, sowie wir das in Satz 3.22 getan haben. Gemäss diesem Satz gibt es nämlich eine eindeutige Lösung der WLГ mit Anfangsbedingung und periodischer Bedingung.
 - Eine andere Möglichkeit im Fall des räumlichen Gebietes \mathbb{R} ist die Bedingung, dass die Funktion asymptotisch nicht zu stark wächst, wenn wir in \mathbb{R} nach $\pm\infty$ gehen. Gemäss Satz 4.13 gibt es nämlich eine eindeutige Lösung der WLГ, die diese asymptotische Bedingung und eine Anfangsbedingung erfüllt.

Da die Laplacegleichung zeitunabhängig ist, ist eine Anfangsbedingung nicht sinnvoll. Da sie aus der Wärmeleitungsgleichung entsteht, indem wir zeitlich konstante Funktionen betrachten, ist es gemäss den obigen Bemerkungen naheliegend, dass es eine eindeutige Lösung der Laplacegleichung mit Dirichlet-Randbedingungen gibt. Das ist für ein gutes beschränktes Gebiet U in \mathbb{R}^n tatsächlich der Fall, d. h., das *Dirichlet-Problem* für die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{auf } U, \\ u &= g && \text{auf dem Rand } \partial U \text{ von } U \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Lösung u . Wir werden dies zum Beispiel im homogenen Fall $f = 0$ für die U gegeben durch die Kreisscheibe sehen und eine Lösungsformel für u kennenlernen (die Poissonformel).

5.1 Die Poissonformel für die Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe

Sei $n, p \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(U, \mathbb{R}^p)$.

²Dabei fassen wir u als eine Funktion nur der Ortsvariablen x_1, \dots, x_n auf. Das ist möglich, wenn u zeitlich konstant ist.

Definition 5.1 (Harmonizität). Wir nennen u harmonisch g. d. w. $\Delta u = 0$.³

Beispiele. Die folgenden Funktionen sind harmonisch (siehe Übungsserie 8):

•

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \begin{cases} \log \|x\|, & \text{falls } n = 2, \\ \|x\|^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Bemerkung: Bis auf eine multiplikative Konstante ist φ die sogenannte Fundamentallösung (oder *Grundlösung*) der Laplacegleichung.

• jede holomorphe Funktion $u : U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (Fall $n = p = 2$)

Beispiel dafür: komplexes Polynom

Wir definieren die offene *Einheitskreisscheibe* als die Menge

$$B^2 := B_1^2(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Wir definieren den *Rand* von B^2 als den Kreis, also die Menge

$$\partial B^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sei $g : \partial B^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Dirichlet-Randwertproblem für die homogene Laplacegleichung ist gegeben durch

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{auf } B^2) \tag{5.4}$$

$$u(x, y) \rightarrow g(x_0, y_0) \quad \text{für } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0), \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2. \tag{5.5}$$

Um dieses Problem zu lösen, definieren wir den *Poissonkern für die Einheitskreisscheibe* als die Funktion

$$K : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(r, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}.$$

Wir definieren die Funktionen

$$v : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(r, \varphi) := \int_0^{2\pi} K(r, \varphi - \psi) g(\cos \psi, \sin \psi) d\psi,$$

$$u : B^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) := v(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\cos \psi, \sin \psi)}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi, \tag{5.6}$$

wobei $(x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

³Das bedeutet, dass $\Delta u_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Satz 5.2 (Laplacegleichung auf der Kreisscheibe mit Dirichlet-Randbedingung, Poissonformel). *Die folgenden Aussagen gelten.*

- (i) Die Funktion u ist glatt, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar.
- (ii) u löst das Dirichlet-Randwertproblem für die homogene Laplacegleichung (5.4,5.5).
- (iii) [Eindeutigkeit der Lösung] Sei $\tilde{u} : B^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (5.4,5.5). Dann gilt

$$\tilde{u} = u.$$

Beweis: (i,ii): [Eva10, Theorem 15, p. 41]

(iii) folgt aus dem unten formulierten Maximumprinzip. Siehe Übungsserie 9.

Bemerkungen. • (5.5) ist eine Randbedingung für u . (u ist nur in der offenen Kreisscheibe definiert, nicht auf dem Rand ∂B^2 .)

- Teil (5.2) des obigen Satzes besagt, dass u die einzige Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (5.4,5.5) ist. Das bedeutet, dass dieses Randwertproblem Phänomene, die durch die Laplacegleichung beschrieben werden, vollständig beschreibt. Ein Beispiel eines solchen Phänomens ist ein Gleichgewichtszustand einer diffundierenden chemischen Substanz. Ein anderes Beispiel ist das elektrostatische Potential im Vakuum (also ohne Ladungen).

Frage. *Wie kommt man auf die Lösungsformel (5.6)?*

Wir werden diese Frage jetzt beantworten, indem wir die Formel auf eine heuristische Weise “herleiten”.

Bemerkungen. • Die “Herleitung” verwendet die Fourierreihe einer periodischen Funktion. Sie liefert eine heuristische Methode, um Formeln für die Lösungen von Differentialgleichungen zu finden.

- Diese Herleitung beweist *nicht*, dass die Formel die das Dirichletproblem für die Laplacegleichung auch tatsächlich löst. Das muss man separat überprüfen.

Heuristische “Herleitung” der Lösungsformel (5.6): Wir nehmen an, dass u das Dirichlet-Randwertproblem (5.4,5.5) löst. Wir definieren die *Polar-Kartesische Transformation*

$$\Psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Psi(r, \varphi) := r(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (5.7)$$

und die Funktion

$$v := u \circ \Psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(r, \varphi) = u(\Psi(r, \varphi)).$$

(Wir können v als die Funktion u in Polarkoordinaten auffassen.) Wir haben

$$\begin{aligned} & v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} \\ &= (\Delta u) \circ \Psi \text{ (gemäss Übungsserie 8, Laplaceoperator für } \mathbb{R}^2 \text{ in Polarkoordinaten)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$= 0 \quad \text{(wegen (5.4)),} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= u(r(\cos \varphi, \sin \varphi)) \\ &\rightarrow h(\varphi_0) := g(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) \text{ für } (r, \varphi) \rightarrow (1, \varphi_0), \forall \varphi_0 \in \mathbb{R} \text{ (wegen der (5.5)).} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Wir verwenden nun die Methode der Trennung der Variablen und machen zunächst den Produktansatz für v . Wir nehmen also an, dass v die folgende Form hat⁴:

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{5.11}$$

Aus (5.9) folgt, dass

$$\begin{aligned} & R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0, \\ \text{d. h.} \quad & r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Da die linke Seite nicht von φ und die rechte Seite nicht von r abhängt, ist λ eine Konstante. Φ löst also die Gleichung

$$\Phi'' = -\lambda\Phi. \tag{5.13}$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für Φ . Wir betrachten den **Fall** $\lambda \neq 0$. Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG (5.13) dann eine Linearkombination der Funktionen

$$\Phi(\varphi) := e^{\pm i\sqrt{\lambda}\varphi}. \tag{5.14}$$

Gemäss (5.7) gilt

$$\Psi(r, \varphi + 2\pi) = \Psi(r, \varphi), \quad \forall \varphi.$$

⁴Später suchen wir nach einer Lösung, die eine unendliche Linearkombination solcher Produkte ist.

Wegen $v = u \circ \Psi$ gilt, dass

$$v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi), \quad \forall \varphi.$$

Da $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, gilt also, dass

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad \forall \varphi.$$

Wegen (5.14) folgt daraus, dass $k := \sqrt{\lambda} \neq 0$ eine ganze Zahl ist. (Insbesondere ist $\lambda > 0$.) Die Gleichung (5.12) lautet

$$r^2 R'' + rR' = k^2 R. \quad (5.15)$$

Wir machen den Potenzansatz $R(r) := r^\alpha$. Diese Funktion löst die GDG (5.15) genau dann, wenn $\alpha = \pm k$, also

$$R(r) = r^k \text{ oder } r^{-k}. \quad (5.16)$$

Wir betrachten jetzt den **Fall** $\lambda = 0$. Wie Sie in Analysis 2 gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG (5.13) dann eine Linearkombination der Funktionen

$$\Phi \equiv 1, \quad \Phi(\varphi) := \varphi.$$

Die Funktion $\Phi(\varphi) = \varphi$ ist nicht 2π -periodisch und scheidet daher aus. Die allgemeine Lösung der GDG (5.12) ist im betrachteten Fall $\lambda = 0$ eine Linearkombination der Funktionen

$$R \equiv 1, \quad R(r) := \log r.$$

Zusammenfassend haben wir zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ zwei (linear unabhängige) Lösungen der PDG (5.9) der Form (5.11), nämlich:

$$v(r, \varphi) = \begin{cases} r^k e^{ik\varphi}, & r^{-k} e^{ik\varphi}, & \text{falls } k \neq 0, \\ 1, & \log(r), & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Wir suchen jetzt eine Lösung der PDG (5.9), die eine unendliche Linearkombination dieser Lösungen ist. Für $k > 0$ ist nur die Lösung $v(r, \varphi) = r^k e^{ik\varphi}$ wohldefiniert und stetig bei $r = 0$, da dann r^{-k} für $r \rightarrow 0$ divergiert. Für $k < 0$ ist nur die Lösung $v(r, \varphi) = r^{-k} e^{ik\varphi}$ wohldefiniert und stetig bei $r = 0$, da dann r^k für $r \rightarrow 0$ divergiert. Für $k = 0$ ist nur die Lösung $v \equiv 1$ wohldefiniert und stetig bei $r = 0$, da $\log r$ für $r \rightarrow 0$ divergiert. Die stetigen Lösungen sind also gegeben durch

$$v(r, \varphi) = r^{|k|} e^{ik\varphi} = \begin{cases} r^k e^{ik\varphi}, & \text{falls } k \geq 0, \\ r^{-k} e^{ik\varphi}, & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

(Im Fall $k = 0$ ist $r^k e^{ik\varphi} = 1$.) Wir suchen daher eine Lösung der PDG (5.9) der Form

$$v(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi}. \quad (5.17)$$

Aus der Randbedingung (5.10) folgt, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi_0} = h(\varphi_0), \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass

$$c_k = \widehat{h}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) e^{-ik\psi} d\psi, \quad (5.18)$$

der k -te Fourierkoeffizient von h . Aus (5.17) folgt daher, dass

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) e^{-ik\psi} d\psi \right) r^{|k|} e^{ik\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\varphi-\psi)} d\psi \quad (\text{da } e^{-ik\psi} e^{ik\varphi} = e^{ik(\varphi-\psi)}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{z}^\ell \right) d\psi, \end{aligned} \quad (5.19)$$

wobei

$$z := r e^{i(\varphi-\psi)} \quad (5.20)$$

und wir verwendet haben, dass $\bar{z} = r e^{-i(\varphi-\psi)}$. (ℓ spielt die Rolle des Index $-k$.) Wie Sie in Analysis 1 gesehen haben, gilt für die geometrische Reihe für $|z| = r < 1$, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad \text{also } \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}.$$

Durch Erweitern der Brüche erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{z}^\ell &= \frac{(1-z)(1-\bar{z}) + z(1-\bar{z}) + \bar{z}(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})} \\ &= \frac{1 - |z|^2}{1 - 2 \operatorname{Re}(z) + |z|^2} \quad (\text{wobei } \operatorname{Re} \text{ den Realteil bezeichnet}) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2} \quad (\text{wegen (5.20)}). \end{aligned}$$

Indem wir das in (5.19) einsetzen und $h(\psi) = g(\cos \psi, \sin \psi)$ verwenden, erhalten wir

$$v(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\cos \psi, \sin \psi)}{1 - 2r \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi,$$

also die Lösungsformel (5.6), wie gewünscht.

5.2 Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe mittels Fourierreihe

Wir betrachten das folgende Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } B^2 \quad (5.21)$$

$$u(x, y) = g(x, y) := y^2 \quad \text{für } (x, y) \in \partial B^2. \quad (5.22)$$

Um dieses Problem zu lösen, wechseln wir zu Polarkoordinaten. Wegen der Gleichheit (5.8) suchen wir also eine Lösung $v : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für } 0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R}, \\ v(1, \varphi) &= h(\varphi) := \sin^2(\varphi), \quad \text{für } \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie in (5.17,5.18) erhalten wir

$$v(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}_k r^{|k|} e^{ik\varphi}. \quad (5.23)$$

Mittels der Eulerschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}}{-4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-2i\varphi}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung von h können wir die Fourierkoeffizienten von h ablesen. Diese sind:

$$\widehat{h}_0 = \frac{1}{2}, \quad \widehat{h}_2 = -\frac{1}{4}, \quad \widehat{h}_{-2} = -\frac{1}{4}, \quad \widehat{h}_k = 0, \quad \text{falls } k \neq 0, \pm 2.$$

(Das folgt aus dem Beispiel i.) Mittels (5.23) erhalten wir also

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}r^2 e^{2i\varphi} - \frac{1}{4}r^2 e^{-2i\varphi}. \quad (5.24)$$

Wir haben

$$(x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \frac{1}{2}(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) = \cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi.$$

Daher erhalten wir aus (5.24) in Standardkoordinaten (kartesischen Koordinaten)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= v(r, \varphi) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r^2 \cos(2\varphi) \\ &= \frac{1}{2} (1 - r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{1}{2} (1 - x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Diese Funktion löst das Dirichlet-Randwertproblem (5.21,5.22) tatsächlich, da

$$\Delta u = \frac{1}{2}(-2+2) = 0, \quad u(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - x^2 + y^2) = y^2, \text{ falls } (x, y) \in \partial B^2, \text{ d. h., } x^2 + y^2 = 1.$$

5.3 Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf einem Quadrat, unendliche Superposition

Wir betrachten das offene Quadrat $U := (0, \pi) \times (0, \pi)$ und schreiben ∂U für den Rand von U . Wir betrachten eine stetige Funktion $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ und das folgende Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } U \tag{5.25}$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U. \tag{5.26}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $g = 0$ ist, ausser auf dem Teil des Rands gegeben durch

$$[0, \pi] \times \{\pi\} = \{(x, \pi) \mid x \in [0, \pi]\}.$$

Wir definieren

$$h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} g(x, \pi), & \text{falls } x \geq 0, \\ -g(-x, \pi), & \text{falls } x < 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Um eine Lösung des Dirichletproblems (5.25,5.26) zu finden, nehmen wir an, dass u dieses Problem löst und die folgende Form hat:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y), \tag{5.28}$$

$$u_k(x, y) := \sin(kx) \sinh(ky). \tag{5.29}$$

($\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ist der Sinus hyperbolicus.) Wir machen also den Ansatz, dass u eine unendliche Superposition ist von Lösungen der Laplacegleichung ist.

Bemerkung. In der Musterlösung zur Übungsserie 9 (Laplacegleichung auf dem Quadrat) wird gezeigt, dass die Lösung u des Dirichletproblems (5.25,5.26) gegeben ist durch ein Vielfaches von u_k für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$, falls u ein Produkt der Form $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ist. Das motiviert den Ansatz (5.28).

Wir bestimmen die Koeffizienten c_k . Wir definieren die trigonometrischen Fourierkoeffizienten a_k, b_k von h analog zu (3.15,3.16) mit Periode $P = 2\pi$, aber durch Integration auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ⁵, also:

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(kx) dx,$$

da der Integrand gerade ist. Für $x \in [0, \pi]$ haben wir

$$\begin{aligned} h(x) &= u(x, \pi) \quad (\text{wegen der Randbedingung (5.26)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(k\pi) \sin(kx) \quad (\text{wegen (5.28,5.29)}). \end{aligned}$$

Mittels der Proposition 3.18 (Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form) folgt daraus durch Koeffizientenvergleich, dass

$$\begin{aligned} b_k &= c_k \sinh(k\pi), \\ \text{d. h., } c_k &= \frac{b_k}{\sinh(k\pi)}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (5.28) folgt daraus, dass

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sinh(k\pi)} u_k(x, y). \quad (5.30)$$

Diese Funktion löst das Dirichletproblems (5.25,5.26). (Überprüfen Sie das.)

Beispiel. [Dirichletproblem für die Laplacegleichung auf einem Quadrat] Wir betrachten das Problem (5.25,5.26) mit h wie in (5.27) gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Wir bestimmen die Lösung u dieses Problems mittels (5.30). Dazu bestimmen wir die trigonometrischen Fourierkoeffizienten b_k von h . Dazu betrachten wir die Einschränkung der Betragsfunktion auf das Intervall $[-\pi, \pi]$, also die Funktion

$$\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := |x|.$$

⁵ h ist auf diesem Intervall definiert und kann 2π -periodisch fortgesetzt werden.

Wir definieren f als die (2π) -periodische Fortsetzung dieser Funktion. Das ist die *Zickzackfunktion*, die wir in einer Aufgabe in Übungsserie 6 (Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der Zickzackfunktion) betrachtet haben. Gemäss der Lösung zu dieser Übungsaufgabe sind die Fourierkoeffizienten der Funktion f gegeben durch

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq 0 \text{ gerade ist,} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} \quad (5.31)$$

Für $x \in [-\pi, \pi]$ haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}_k e^{ikx} &= h(x) \\ &= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \widehat{f}_0 - \frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} i^k \widehat{f}_k e^{ikx} \quad (\text{da } e^{ik\frac{\pi}{2}} = i^k). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich und mittels (5.31) folgt daraus, dass

$$\widehat{h}_k = \begin{cases} \widehat{f}_0 - \frac{\pi}{2} = 0, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq 0 \text{ gerade ist,} \\ i^k \widehat{f}_k = -\frac{2i^k}{\pi k^2}, & \text{falls } k \neq 0 \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Wegen der Gleichheit (3.24) gilt daher

$$\begin{aligned} b_k &= i(\widehat{h}_k - \widehat{h}_{-k}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -\frac{4i^{k+1}}{\pi k^2}, & \text{falls } k \neq 0 \text{ ungerade ist,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $i^{-k} = -i^k$, falls k ungerade ist. Gemäss (5.30) erhalten wir

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sinh(k\pi)} u_k(x, y) = \sum_{k=1, \dots, \infty: k \text{ ungerade}} \frac{-4i^{k+1}}{\pi k^2 \sinh(k\pi)} \sin(kx) \sinh(ky).$$

Das ist die Lösung des Dirichletproblems (5.25, 5.26).

5.4 Mittelwertprinzip für harmonische Funktionen

Das Mittelwertprinzip besagt, dass eine harmonische Funktion auf einem Ball im Mittelpunkt des Balles den Mittelwert ihrer Randwerte⁶ annimmt. Das ist die Aussage des folgenden Satzes. Erinnerung an Analysis 1 und 2: Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in (0, \infty)$. Wir schreiben die euklidische Norm eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Wir definieren den *offenen Ball* (oder die *offene (Voll-)Kugel*) in \mathbb{R}^n mit Mittelpunkt x_0 und Radius r als die Menge

$$B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

und den *abgeschlossenen Ball* in \mathbb{R}^n mit Mittelpunkt x_0 und Radius r als die Menge

$$\bar{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Der *Abschluss* \bar{S} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die S enthält. Das *Innere* $\overset{\circ}{S}$ ist die Menge aller inneren Punkte x von S . (Das bedeutet, dass es ein $r \in (0, \infty)$, sodass der Ball $B_r^n(x)$ in S enthalten ist.) Der *Rand* von S ist die Differenz

$$\partial S := \bar{S} \setminus \overset{\circ}{S}.$$

Der Rand des Balles $B_r^n(x_0)$ ist die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre (=Kugeloberfläche)

$$S_r^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

Wir kürzen ab:

$$B^n := B_1^n(0), \quad \bar{B}^n := \bar{B}_1^n(0), \quad S^{n-1} := S_1^{n-1}(0).$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^1 -Untermannigfaltigkeit der Dimension d (möglicherweise mit Rand) und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \int_M f \, dA &:= \text{Riemann-Integral von } f \text{ (über } M) \\ \text{Vol}_d(M) &:= \int_M 1 \, dA = d\text{-dimensionales Volumen von } M \\ \alpha_n &:= \text{Vol}_n(B^n) \\ \int_M f \, dA &:= \frac{\int_M f \, dA}{\text{Vol}_d(M)} \end{aligned}$$

⁶Damit meinen wir die Werte der Funktion auf dem Rand des Balles.

Bemerkung 5.3. [Volumen der Bälle und Sphären] In Analysis 2 haben wir mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß gezeigt, dass

$$\text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) = n \text{Vol}_n(B^n) = n\alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, dass

$$\text{Vol}_n(\overline{B}_r^n(x_0)) = \alpha_n r^n, \quad (5.32)$$

$$\text{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}(x_0)) = n\alpha_n r^{n-1} \quad (5.33)$$

Zum Beispiel gilt

$$\alpha_1 = \text{Vol}_1(B^1) = \text{Länge des Intervalles } \overline{B}^1 = [-1, 1] = 2,$$

$$\alpha_2 = \text{Vol}_2(B^2) = \text{Flächeninhalt der Einheitskreisscheibe } \overline{B}^2 = \pi,$$

$$\alpha_3 = \text{Vol}_3(B^3) = \text{Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel } \overline{B}^3 = \frac{4\pi}{3},$$

$$\text{Vol}_1(S^1) = \text{Länge des Einheitskreises } S^1 = 2\pi = 2 \text{Vol}_2(\overline{B}^2),$$

$$\text{Vol}_2(S^2) = \text{Flächeninhalt der zweidimensionalen Einheitssphäre } S^2 = 4\pi = 3\alpha_3 = 3 \text{Vol}_3(\overline{B}^3). \quad (5.34)$$

Satz 5.4 (Mittelwertprinzip). *Sei $u : \overline{B}_r^n(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $B_r^n(x_0)$ C^2 und harmonisch ist. Dann gilt*

$$u(x_0) = \int_{S_r^{n-1}(x_0)} u \, dA \quad (5.35)$$

$$= \int_{\overline{B}_r^n(x_0)} u \, dx. \quad (5.36)$$

Bemerkung. Die linke Seite dieser Gleichheit ist der Wert von u im Mittelpunkt des Balles $\overline{B}_r^n(x_0)$. Der Ausdruck in der Mitte ist der Mittelwert von u über den Rand $\partial\overline{B}_r^n(x_0) = S_r^{n-1}(x_0)$ des Balles. Die rechte Seite ist der Mittelwert von u über den Ball $\overline{B}_r^n(x_0)$.

Im Beweis dieses Satzes werden wir Divergenzsatz von Gauß verwenden, den wir in Analysis 2 kennengelernt haben. Dieser Satz besagt das Folgende.

Satz 5.5 (Divergenzsatz von Gauß). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet und $X \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann ist das Integral der Divergenz von X über U gleich dem Fluss von X durch den Rand von U , d. h.*

$$\int_U \nabla \cdot X \, dx = \int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA, \quad (5.37)$$

wobei ν die nach aussen weisende Koorientierung (= Einheitsnormalvektorfeld) von ∂U ist.

Beweis des Satzes 5.4: (5.35): Wir definieren die Funktion

$$\varphi :]0, r[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) := \int_{S_s^{n-1}(x_0)} u \, dA.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : S^{n-1} \rightarrow S_s^{n-1}(x_0), \quad \Phi(z) := x_0 + sz.$$

(Wir können diese Abbildung als eine Variablentransformation auffassen). Es gilt

$$\int_{S_s^{n-1}(x_0)} f \, dA = s^{n-1} \int_{S^{n-1}} f \circ \Phi(z) \, dA(z) \quad \text{für jedes stetige } f : S_s^{n-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.38)$$

$$\text{Vol}_{n-1}(S_s^{n-1}(x_0)) = s^{n-1} \text{Vol}_{n-1}(S^{n-1}). \quad (5.39)$$

(Überprüfen Sie das!) Daraus folgt, dass

$$\varphi(s) = \int_{S_s^{n-1}(x_0)} u \, dA = \int_{S^{n-1}} u(x_0 + sz) \, dA(z). \quad (5.40)$$

Sei $s \in]0, r[$. Wir definieren

$$\nu_s : S_s^{n-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nu_s(y) := \frac{y - x_0}{s}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{d}{ds} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + sz) \, dA(z) \quad (\text{gemäss (5.40)}) \\ &= \int_{S^{n-1}} Du(x_0 + sz)z \, dA(z) \quad (\text{ableiten unter dem Integral}) \\ &= \int_{S_s^{n-1}(x_0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x_0}{s} \, dA(y) \quad (\text{gemäss (5.38,5.39)}) \\ &= \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(S_s^{n-1}(x_0))} \int_{S_s^{n-1}(x_0)} \nabla u(y) \cdot \nu_s(y) \, dA(y) \\ &= \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(S_s^{n-1}(x_0))} \int_{B_s^n(x_0)} \nabla \cdot (\nabla u) \, dx. \end{aligned} \quad (5.41)$$

In der letzten Gleichheit haben wir den Divergenzsatz von Gauß (Satz 5.5) verwendet sowie die Tatsache, dass ν_s das nach aussen zeigende Einheitsnormalvektorfeld auf dem Rand von $B_s^n(x_0)$ ist. Gemäss Voraussetzung ist $\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u = 0$. Daher gilt gemäss (5.41), dass $\varphi'(s) = 0$. Daraus folgt, dass φ auf $]0, r[$ konstant ist. Da u stetig ist, ist φ

an der Stelle r stetig. Es folgt, dass φ konstant ist (auf $]0, r]$). Es ist also $\varphi(r) = \varphi(s)$ für jedes $s \in]0, r]$ und daher

$$\varphi(r) = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = u(x_0),$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit (5.40) und Stetigkeit von u an der Stelle x_0 verwendet haben. Das beweist (5.35).

(5.36): Mittels Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_r^n(x_0)} u \, dx &= \int_0^r \left(\int_{S_s^{n-1}(x_0)} u \, dA \right) ds \\ &= \int_0^r n \alpha_n s^{n-1} u(x_0) \, ds \quad (\text{wegen (5.35, 5.33) mit } r \text{ ersetzt durch } s) \\ &= \alpha_n r^n u(x_0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.32) folgt daraus, dass

$$\int_{\overline{B}_r^n(x_0)} u \, dx = u(x_0).$$

Das beweist (5.36) und schliesst den Beweis des Satzes 5.4 ab. \square

Alternativer Beweis des Satzes 5.4 im Fall $n = 2$: Wir betrachten zuerst den Fall $x = 0$ und $r = 1$. Aus Teil (iii) (Eindeutigkeit) des Satzes 5.2, folgt, dass u durch die Poissonformel (5.6) gegeben ist. Daher gilt

$$u(0) = \frac{1-0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\cos \psi, \sin \psi)}{1-0+0} d\psi = \int_{S_1^1(0,0)} g \, ds,$$

d. h., die Formel (5.35). In der allgemeinen Situation folgt diese Formel aus dem Fall $x = 0$ und $r = 1$, mit Hilfe einer Variablensubstitution. \square

Wir können den Satz 5.4 verwenden, um die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung im Mittelpunkt einer Kreisscheibe zu berechnen.

Beispiel. [Mittelwertprinzip] Sei $u : \overline{B}^2 := \overline{B}_1^2(0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $B^2 := B_1^2(0, 0)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und das Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } B^2, \\ u(x_0, y_0) &= g(x_0, y_0) := x_0^2, \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2. \end{aligned}$$

Aufgabe: Berechne $u(0, 0)$.

Lösung: Gemäss Satz 5.4 haben wir

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos \psi, \sin \psi) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi} (\sin \psi \cos \psi + \psi) \Big|_{\psi=0}^{2\pi} \\ &\quad \text{(Prüfen Sie nach, dass die rechte Seite eine Stammfunktion ist.)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.5 Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen, Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems für die Poissongleichung

Das schwache Maximumprinzip besagt, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum auf dem Rand ihres Definitionsbereiches annimmt. Das starke Maximumprinzip besagt, dass eine harmonische Funktion konstant ist, falls sie auf einem (weg-)zusammenhängenden Gebiet definiert ist und ihr Maximum im Innern des Gebietes annimmt. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes. Sei n eine natürliche Zahl, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge und $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 5.6 (Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktion). *Wir nehmen an, dass stetig ist und die eingeschränkte Funktion $u|_U \in C^2$ und harmonisch ist. Es gilt:*

- (i) (schwaches Maximum- und Minimumprinzip) *Die Funktion u nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand von U an, d. h.*

$$\begin{aligned} \max_{\bar{U}} u &:= \max_{x \in \bar{U}} u(x) = \max_{\partial U} u, \\ \min_{\bar{U}} u &= \min_{\partial U} u. \end{aligned}$$

- (ii) (starkes Maximum- und Minimumprinzip) *Wir nehmen an, dass U wegzusammenhängend ist und dass es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass*

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u \quad \text{oder} \quad u(x_0) = \min_{\bar{U}} u.$$

Dann ist u konstant.

Beweis des Satzes 5.6: (ii): **Fall:** Es gibt einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u.$$

Behauptung 1. Sei $y \in U$ ein Punkt, sodass

$$u(y) = \max_{\bar{U}} u.$$

Sei $r \in (0, \infty)$, sodass $\bar{B}_r^n(y) \subseteq U$. Dann ist u auf $\bar{B}_r^n(y)$ konstant.

Beweis der Behauptung 1: Gemäss dem Mittelwertprinzip (Satz 5.4) gilt

$$\int_{\bar{B}_r^n(y)} (u(y) - u(x)) dx = u(y) - u(y) = 0. \quad (5.42)$$

Da $u(y) \geq u$ auf $\bar{B}_r^n(y)$, folgt daraus, dass $u(y) - u = 0$ auf $\bar{B}_r^n(y)$. (Falls es ein $x_0 \in \bar{B}_r^n(y)$ gäbe, sodass $u(y) \neq u(x_0)$, dann ist $u(y) > u(x_0)$. Wegen $u(y) \geq u$ gilt dann $\int_{\bar{B}_r^n(y)} (u(y) - u(x)) dx > 0$, im Widerspruch zu (5.42).) \square

Gemäss unserer Annahme gibt es einen Punkt $x_0 \in U$, sodass $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$. Sei $x \in U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_k \in U$ und $r_0, \dots, r_k \in (0, \infty)$, sodass

$$\begin{aligned} \bar{B}_{r_i}(x_i) &\subseteq U, & \forall i = 0, \dots, k, \\ x_i &\in \bar{B}_{r_{i-1}}(x_{i-1}), & \forall i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$x_k = x. \quad (5.44)$$

Da $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$, folgt mittels Behauptung 1, dass u auf $\bar{B}_{r_0}^n(x_0)$ konstant ist. Mittels (5.43) folgt daraus, dass $u(x_1) = u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$. Mittels Behauptung 1, dass u auf $\bar{B}_{r_1}^n(x_1)$ konstant ist. Mittels (5.43) folgt daraus, dass $u(x_2) = u(x_1) = \max_{\bar{U}} u$. Indem wir dieses Argument wiederholen, folgt schliesslich, dass $u(x_k) = u(x_0)$. Wegen (5.44) gilt also $u(x) = u(x_k) = u(x_0)$. Somit u konstant. Das beweist (ii) im Fall, dass es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$. Der Fall, dass es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$, kann auf diesen Fall reduziert werden, indem wir die Funktion $\tilde{u} := -u$ betrachten.

Die Aussage (i) folgt aus (ii). Das beweist Satz 5.6. \square

Beweis: [Eva10, Theorem 4, p. 27].

Beispiel. [Maximum- und Minimumprinzip] Sei $u : \overline{B}^2 := \overline{B}_1^2(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $B^2 := B_1^2(0,0)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und das Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } B^2, \\ u(x_0, y_0) &= g(x_0, y_0) := e^{x_0}, && \forall (x_0, y_0) \in \partial \overline{B}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe: Zeige, dass gilt:

$$\frac{1}{e} \leq u(x, y) \leq e, \quad \forall (x, y) \in \overline{B}^2.$$

Lösung: Gemäss dem Maximumprinzip (Satz 5.6(i)) gilt

$$u(x, y) \leq \max_{(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}^2} g(x_0, y_0) = \max_{(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}^2} e^{x_0} \quad \text{für jedes } (x, y) \in \overline{B}^2. \quad (5.45)$$

Wir betrachten ein $(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}_1^2(0,0)$. Es gilt dann $x_0^2 + y_0^2 = 1$, also $x_0^2 = 1 - y_0^2 \leq 1$, darum, dass $x_0 \leq 1$ und daher $e^{x_0} \leq e$. Indem wir das in (5.46) einsetzen, erhalten wir, dass

$$u(x, y) \leq e \quad \text{für jedes } (x, y) \in \overline{B}^2.$$

Gemäss dem Minimumprinzip (Satz 5.6(i)) gilt

$$u(x, y) \geq \min_{(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}^2} g(x_0, y_0) = \min_{(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}^2} e^{x_0} \quad \text{für jedes } (x, y) \in \overline{B}^2. \quad (5.46)$$

Wir betrachten ein $(x_0, y_0) \in \partial \overline{B}_1^2(0,0)$. Es gilt dann $x_0^2 + y_0^2 = 1$, also $x_0^2 = 1 - y_0^2 \leq 1$, darum, dass $x_0 \geq -1$ und daher $e^{x_0} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$. Indem wir das in (5.46) einsetzen, erhalten wir, dass

$$u(x, y) \geq \frac{1}{e} \quad \text{für jedes } (x, y) \in \overline{B}^2.$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\frac{1}{e} \leq u(x, y) \leq e, \quad \forall (x, y) \in \overline{B}^2.$$

Als Anwendung des Maximumprinzips folgt, dass die Lösung der Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingungen eindeutig ist. Das ist der Inhalt des folgenden Korollars. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Korollar 5.7 (Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems für die Poissongleichung). *Es gibt höchstens eine stetige Funktion $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf U C^2 ist und das folgende inhomogene Randwertproblem löst:*

$$\Delta u = f \quad \text{auf } U, \quad (5.47)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.48)$$

Beweis des Korollars 5.7: Seien u, \tilde{u} Lösungen dieses Problems. Die Funktion $v := u - \tilde{u}$ löst das homogene Randwertproblem

$$\Delta v = 0 \quad \text{auf } U, \quad (5.49)$$

$$v = 0 \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.50)$$

Gemäss Satz 5.6(i) gilt daher

$$0 = \min_{\partial U} v \leq v \leq \max_{\partial U} v = 0,$$

also $u - \tilde{u} = v \equiv 0$. Das beweist Korollar 5.7. \square

5.6 Fundamentallösung der Laplacegleichung, Poissongleichung auf \mathbb{R}^n , Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum und auf einem Ball, greensche Funktion

Definition 5.8 (Fundamentallösung der Laplacegleichung). *Für jedes $n \geq 2$ definieren wir die Fundamentallösung (oder Grundlösung) der Laplacegleichung als die Funktion*

$$\Phi_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_n(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\|, & \text{falls } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n \|x\|^{n-2}}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases} \quad (5.51)$$

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den *Träger von φ* als den Abschluss der Nichtnullstellenmenge von φ ,

$$\text{supp } \varphi := \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = \overline{\{x \in U \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Wir definieren

$$C_c^2(U, \mathbb{R}) := \{\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt und in } U \text{ enthalten}\}.$$

Wir nennen die Elemente $\varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R})$ *Testfunktionen*. Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Funktion. Wir betrachten die *Poissongleichung* für eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$-\Delta u = f. \quad (5.52)$$

Wir definieren die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(x-y) f(y) dy. \quad (5.53)$$

Satz 5.9 (Lösung der Poissongleichung auf \mathbb{R}^n). (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $-\Delta u = f$ (auf \mathbb{R}^n)

Beweis: S. 152

Bemerkungen 5.10. [Lösung zur Poissongleichung, Coulombpotential eines Punktteilchens]

(i) Im Beweis von $-\Delta u = f$ werden wir die Tatsache verwenden, dass

$$\Delta \Phi_n = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(Siehe Übungsserie 8.)

(ii) (heuristischer Grund für $-\Delta u = f$) Heuristisch erfüllt Φ_n auf ganz \mathbb{R}^n die Gleichung

$$-\Delta \Phi_n = \delta,$$

wobei δ die “ δ -Funktion” ist. Diese Funktion ist überall gleich 0 ist, ausser im Punkt 0, wo sie “gleich ∞ ” ist. Ihr Integral ist gleich 1. (Eine solche Funktion gibt es nur heuristisch, nicht mathematisch präzise. Siehe auch die Fussnote dazu auf S. 126.) Formal folgt daraus, dass

$$-\Delta u = -\Delta(\Phi_n * f) = (-\Delta \Phi_n) * f = \delta * f = f,$$

wie behauptet.

(iii) Im Beweis des Satzes 5.9 wird der Ball $B_\varepsilon^n(0)$ aus \mathbb{R}^n herausgeschnitten und der Divergenzatz von Gauß zweimal auf das Gebiet $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon^n(0)$ angewendet. Dadurch kann die Singularität der “ δ -Funktion” im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ umschifft werden.

(iv) Gemäss einer Aufgabe in Übungsserie 8 (elektrostatisches Potential, Poissongleichung) erfüllt in der Elektrostatik das *elektrostatische Potential* $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Poissongleichung

$$-\Delta \varphi = f := \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante ist. Ein *Punktteilchen* wird heuristisch durch die Ladungsverteilung

$$\rho = q\delta$$

beschrieben, wobei q die Ladung des Teilchens ist. Das zugehörige elektrostatische Potential ist gegeben durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\|x\|} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Phi_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$



Abbildung 5.1: George Green, britischer Mathematiker und Physiker, 1793–1841.

(Siehe Definition 5.8 mit $n = 3$ und (5.34).) Gemäss Bemerkung (ii) erfüllt diese Funktion heuristisch tatsächlich die Poissongleichung

$$-\Delta\varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta.$$

Im Beweis des Teils (ii) des Satzes 5.9 werden wir den folgenden Hilfssatz verwenden. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet, ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld ⁷ und $\varphi, \psi \in C^2(\overline{U})$. Wir schreiben

$$\partial_\nu\varphi := \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi := D\varphi\nu = \nabla\varphi \cdot \nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.54)$$

Hilfssatz 5.11 (zweite greensche Identität). *Es gilt*

$$\int_U ((\Delta\varphi)\psi - \varphi\Delta\psi)(x) dx = \int_{\partial U} ((\partial_\nu\varphi)\psi - \varphi\partial_\nu\psi) dA. \quad (5.55)$$

Dieser Hilfssatz ist nach George Green benannt, siehe Abbildung 5.1.

Beweis des Hilfssatzes 5.11: Es gilt

$$(\Delta\varphi)\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi = (\nabla \cdot (\nabla\varphi))\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot ((\nabla\varphi)\psi),$$

wobei wir die Leibnizregel (= Produktregel) verwendet haben. Daraus folgt, dass

$$(\Delta\varphi)\psi - \varphi\Delta\psi = \nabla \cdot ((\nabla\varphi)\psi - \varphi\nabla\psi).$$

⁷= die nach aussen weisende Koorientierung

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \int_U ((\Delta\varphi)\psi - \varphi\Delta\psi)(x) dx &= \int_U \nabla \cdot ((\nabla\varphi)\psi - \varphi\nabla\psi)(x) dx \\
 &= \int_{\partial U} ((\nabla\varphi)\psi - \varphi\nabla\psi) \cdot \nu dA \\
 &\quad \text{(gemäss dem Satz von Gauß, Analysis 2)} \\
 &= ((\partial_\nu\varphi)\psi - \varphi\partial_\nu\psi) dA.
 \end{aligned}$$

Das beweist Hilfssatz 5.11. \square

Beweis des Satzes 5.9 im Fall $n \geq 3$: (i): Siehe [Eva10, Theorem 1, p. 23].

(ii): Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Gemäss unserer Voraussetzung ist das Urbild $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ beschränkt. Daher gibt es eine Zahl $R \in (0, \infty)$, sodass

$$\text{supp } f \subseteq B_R^n(x).$$

Sei $\varepsilon \in (0, R)$. Wir definieren

$$U_\varepsilon := B_R^n(0) \setminus \overline{B_\varepsilon^n(0)}. \quad (5.56)$$

Gemäss der Definition (5.53) und der Tatsache $\text{supp } f \subseteq B_R^n(x)$ gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(x-y)f(y) dy = \int_{B_R^n(0)} \Phi_n(z)f(x-z) dz$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \Delta u(x) &= \int_{B_R^n(0)} \Phi_n(z)\Delta f(x-z) dz \quad \text{(zweimal unter dem Integral ableiten)} \\
 &= I_\varepsilon + J_\varepsilon \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &:= \int_{U_\varepsilon} \Phi_n(y)\Delta f(x-y) dy, \\
 J_\varepsilon &:= \int_{\overline{B_\varepsilon^n(0)}} \Phi_n(y)\Delta f(x-y) dy.
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir (5.56) verwendet. Es gibt eine Konstante $C \in (0, \infty)$, sodass

$$|J_\varepsilon| \leq C\varepsilon^2, \quad \forall \varepsilon \in (0, R). \quad (5.58)$$

Das folgt aus der Tatsache, dass $\Phi_n(x) \sim \|x\|^{2-n}$ (siehe Definition (5.51)) und $\text{Vol}_n(\overline{B}_\varepsilon^n(0)) \sim \varepsilon^n$. Wir schreiben $\Delta_y := \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}^2$. Gemäss der Kettenregel gilt $\Delta f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$ und daher

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{U_\varepsilon} \Phi_n(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= K_\varepsilon + L_\varepsilon + M_\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &:= \int_{U_\varepsilon} \Delta \Phi_n(y) f(x-y) dy, \\ L_\varepsilon &:= \int_{\partial U_\varepsilon} \Phi_n(y) \partial_\nu (f(x-\cdot))(y) dA(y) \\ M_\varepsilon &:= - \int_{\partial U_\varepsilon} \partial_\nu \Phi_n(y) f(x-y) dA(y). \end{aligned}$$

Hierbei ist ∂_ν wie in (5.54) definiert, für das Gebiet $U := U_\varepsilon$. Im zweiten Schritt haben wir die zweite greensche Identität (Hilfssatz 5.11) verwendet. Es gilt

$$\Delta \Phi_n = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(Siehe Übungsserie 8.) Daraus folgt, dass

$$K_\varepsilon = 0. \tag{5.60}$$

Behauptung 1. *Es gibt eine Konstante $C' \in (0, \infty)$, sodass*

$$|L_\varepsilon| \leq C' \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in (0, R). \tag{5.61}$$

Beweis der Behauptung 1: Da $\partial U_\varepsilon = \partial B_R^n(0) \cup \partial B_\varepsilon^n(0)$, gilt

$$L_\varepsilon = \int_{\partial B_R^n(0)} \Phi_n(y) \partial_\nu (f(x-\cdot))(y) dA(y) + \int_{\partial B_\varepsilon^n(0)} \Phi_n(y) \partial_\nu (f(x-\cdot))(y) dA(y). \tag{5.62}$$

Da $\text{supp } f \subseteq B_R^n(x)$, gilt

$$\int_{\partial B_R^n(0)} \Phi_n(y) \partial_\nu (f(x-\cdot))(y) dA(y) = 0. \tag{5.63}$$

Da $\Phi_n(x) \sim \|x\|^{2-n}$ und $\text{Vol}_{n-1}(\overline{B}_\varepsilon^n(0) = S_\varepsilon^{n-1}(0)) \sim \varepsilon^{n-1}$, gibt es eine Konstante $C' \in (0, \infty)$, sodass

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon^n(0)} \Phi_n(y) \partial_\nu (f(x-\cdot))(y) dA(y) \right| \leq C' \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in (0, R).$$

Mittels (5.62,5.63) folgt daraus Behauptung 1. \square

Behauptung 2. *Es gilt*

$$M_\varepsilon = - \int_{\partial B_\varepsilon^n(x)} f(z) dA(z).$$

Beweis der Behauptung 2: Da $\partial U_\varepsilon = \partial B_R^n(0) \cup \partial B_\varepsilon^n(0)$, gilt

$$M_\varepsilon = - \int_{\partial B_R^n(0)} \partial_\nu \Phi_n(y) f(x-y) dA(y) - \int_{\partial B_\varepsilon^n(0)} \partial_\nu \Phi_n(y) f(x-y) dA(y). \quad (5.64)$$

Da $\text{supp } f \subseteq B_R^n(x)$, gilt

$$- \int_{\partial B_R^n(0)} \partial_\nu \Phi_n(y) f(x-y) dA(y) = 0. \quad (5.65)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \partial_{y_i} \|y\|^{2-n} &= \partial_{y_i} (\|y\|^2)^{\frac{2-n}{2}} = \frac{2-n}{2} (\|y\|^2)^{-\frac{n}{2}} 2y_i = (2-n) \frac{y_i}{\|y\|^n}, \\ \text{also} \quad \nabla \|\cdot\|^{2-n}(y) &= -(n-2) \frac{y}{\|y\|^n}, \\ \nu(y) &= -\frac{y}{\|y\|} = -\frac{y}{\varepsilon}, \quad \forall y \in \partial B_\varepsilon^n(0), \end{aligned}$$

und daher mit Hilfe der Definition (5.51),

$$\partial_\nu \Phi_n(y) = \nabla \Phi_n(y) \cdot \nu(y) = -\frac{n-2}{n(n-2)\alpha_n} \frac{y}{\|y\|^n} \cdot \left(-\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{n\alpha_n \varepsilon^{n-1}}, \quad \forall y \in \partial B_\varepsilon^n(0).$$

Da $\text{Vol}_{n-1}(\partial B_\varepsilon^n(0)) = n\alpha_n \varepsilon^{n-1}$, folgt daraus, dass

$$- \int_{\partial B_\varepsilon^n(0)} \partial_\nu \Phi_n(y) f(x-y) dA(y) = - \int_{\partial B_\varepsilon^n(0)} f(x-y) dA(y) = - \int_{\partial B_\varepsilon^n(x)} f(z) dA(z).$$

Mittels (5.64,5.65) folgt daraus Behauptung 2. \square

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= I_\varepsilon + J_\varepsilon \quad (\text{gemäss 5.57}) \\ &= L_\varepsilon + M_\varepsilon + J_\varepsilon \quad (\text{gemäss (5.59,5.60)}) \\ &= L_\varepsilon - \int_{\partial B_\varepsilon^n(x)} f(z) dA(z) + J_\varepsilon \quad (\text{gemäss Behauptung 2}) \\ &\rightarrow 0 - f(x) + 0, \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{wegen Behauptung 1 und (5.58)}). \end{aligned}$$

Da die linke Seite nicht von ε abhängt, folgt daraus, dass

$$\Delta u(x) = -f(x).$$

Das beweist Aussage (ii) des Satzes 5.9. \square

Wir betrachten jetzt das Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum. Dieses ist wie folgt gegeben. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren den *Halbraum*

$$\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Sei $g : \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für die (homogene) Laplacegleichung für eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^n, \tag{5.66}$$

$$u(x) \rightarrow g(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \tag{5.67}$$

Wir definieren den *Poissonkern* für \mathbb{R}_+^n als die Funktion

$$K_{\mathbb{R}_+^n} : \mathbb{R}_+^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) := \frac{2}{n\alpha_n} \frac{x_n}{\|x - y\|^n}. \tag{5.68}$$

Wir definieren

$$u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) g(y) dy. \tag{5.69}$$

Satz 5.12 (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum). *Wir nehmen an, dass $g : \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion u ist glatt und beschränkt.*

(ii) *Sie löst das Randwertproblem (5.66, 5.67).*

Beweis: [Eva10, Theorem 14, p. 37].

Als nächstes betrachten wir das Randwertproblem für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball. Wir schreiben $B^n := B_1^n(0)$ und $S^{n-1} := S_1^{n-1}(0)$ für den Einheitsball und die Einheitssphäre. Sei $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten das Randwertproblem für $u \in C^2(B^n, \mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } B^n, \tag{5.70}$$

$$u(x) \rightarrow g(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad \forall x_0 \in \partial B^n = S^{n-1}. \tag{5.71}$$

Wir definieren den *Poissonkern* für B^n als die Funktion

$$K_{B^n} : B^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad K_{B^n}(x, y) := \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}. \tag{5.72}$$

Wir definieren

$$u : B^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \int_{S^{n-1}} K_{B^n}(x, y)g(y) dA(y). \quad (5.73)$$

Satz 5.13 (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball). *Wir nehmen an, dass $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Dann gilt:*

- (i) *Die Funktion u ist glatt.*
- (ii) *Sie löst das Randwertproblem (5.70, 5.71).*

Beweis: [Eva10, Theorem 15, p. 41]

Bemerkung. [Randwertproblem für die Laplacegleichung auf der Einheitskreisscheibe] Im Fall $n = 2$ stimmen die Formeln (5.6, 5.73) für u miteinander überein. (Überprüfen Sie das!) In diesem Fall stimmt Satz 5.13 daher mit Satz 5.2(i,ii) überein.

“Herleitung” der Lösungsformeln (5.69, 5.73): Diese Formeln basieren auf Satz 5.9 (Lösung der Poissongleichung auf \mathbb{R}^n). Wir betrachten ein allgemeines beschränktes C^1 -Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetige Funktionen $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten das inhomogene Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U, \quad (5.74)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.75)$$

Definition 5.14 (greensche Funktion). *Eine greensche Funktion für das Gebiet U ist eine Funktion*

$$G : \{(x, y) \in U \times \bar{U} \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R},$$

sodass für jedes $x \in U$ die Funktion $G^x := G(x, \cdot) : \bar{U} \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$-\int_U G^x(y) \Delta \varphi(y) dy = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R}), \quad (5.76)$$

$$G^x = 0 \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.77)$$

Bemerkungen. [greensche Funktion]

- Aus (5.76) und der zweiten greenschen Identität (Hilfssatz 5.11) folgt, dass

$$\Delta G^x = 0 \quad \text{auf } U \setminus \{x\}. \quad (5.78)$$

Siehe Übungsserie 11.

- Heuristisch erfüllt G^x die Poissongleichung

$$-\Delta G^x = \delta_x \quad \text{auf } U. \quad (5.79)$$

Hierbei ist δ_x die “um x zentrierte δ -Funktion”. Diese Funktion ist überall gleich 0 ist, ausser im Punkt x , wo sie “gleich ∞ ” ist. Ihr Integral ist gleich 1. (Eine solche Funktion gibt es nur heuristisch, nicht mathematisch präzise.)

Wir schreiben $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$ für das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf dem Rand des Gebiets U und definieren $\partial_\nu \varphi$ wie in (5.54).

Satz 5.15 (Darstellung der Lösung des Randwertproblems mittels Greenscher Funktion). *Wir nehmen an, dass G eine greensche Funktion für das Gebiet U ist und dass $u \in C^2(\bar{U}, \mathbb{R})$ eine Lösung des Problems (5.74, 5.75). Dann gilt*

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \partial_\nu G^x(y) dA(y) + \int_U f(y) G(x, y) dy, \quad \forall x \in U. \quad (5.80)$$

Bemerkungen. • Im Beweis dieses Satzes werden wir die zweite greensche Identität anwenden.

- Die greensche Funktion ist symmetrisch, d. h.

$$G(x, y) = G(y, x), \quad \forall x, y \in U. \quad (5.81)$$

(Siehe [Eva10, Theorem 13, p. 35].) Daraus folgt, dass für jedes $x \in U$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \Delta \int_U f(y) G^x(y) dy &= \Delta \int_U f(y) G^y(x) dy \\ &= \int_U f(y) \Delta G^y(x) dy && \text{(heuristisch mittels Ableiten unter dem Integral)} \\ &= - \int_U f(y) \delta_y(x) dy && \text{(heuristisch gemäss (5.79))} \\ &= - \int_U f(y) \delta_x(y) dy \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 5.15: Sei $x \in U$. Wir wählen ein $r \in (0, \infty)$, sodass $\bar{B}_r^n(x) \subseteq U$. Wir wählen eine Funktion $\varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R})$, sodass

$$\varphi = u \quad \text{auf } \bar{B}_r^n(x). \quad (5.82)$$

Wir definieren

$$U_r := U \setminus \bar{B}_r^n(x), \quad v := u - \varphi.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_U f G^x dy &= - \int_U \Delta u G^x dy \quad (\text{gemäss der Annahme, dass } u \text{ (5.74) löst}) \\ &= - \int_U (\Delta \varphi + \Delta v) G^x dy \quad (\text{da } u = \varphi + v), \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} - \int_U (\Delta \varphi) G^x dy &= \varphi(x) \quad (\text{wegen (5.76)}) \\ &= u(x) \quad (\text{wegen (5.82)}), \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} - \int_U \Delta v G^x dy &= - \int_{U_r} \Delta v G^x dy \quad (\text{da } v = u - \varphi = 0 \text{ auf } \overline{B_r^n}(x) \text{ gemäss (5.82)}) \\ &= - \int_{U_r} v \Delta G^x dy - \int_{\partial U_r} (\partial_\nu v) G^x dA + \int_{\partial U_r} v \partial_\nu G^x dA \\ &\quad (\text{gemäss Hilfssatz 5.11, zweite greensche Identität}) \\ &= - 0 - \int_{\partial U} (\partial_\nu v) G^x dA - \int_{\partial B_r^n(x)} (\partial_\nu v) G^x dA + \int_{\partial U} v \partial_\nu G^x dA + \int_{\partial B_r^n(x)} v \partial_\nu G^x dA. \\ &\quad (\text{wegen (5.78) und der Tatsache } \partial U_r = \partial U \cup \partial B_r^n(x)) \\ &= - 0 - 0 + \int_{\partial U} v \partial_\nu G^x dA + 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

In der letzten Gleichheit haben wir verwendet, dass $G^x = 0$ auf ∂U gemäss (5.77) und dass $v, \partial_\nu v = 0$ auf $\partial B_r^n(x)$, da $v = 0$ auf $\overline{B_r^n}(x)$. Wir definieren

$$V := U \setminus \text{supp } \varphi.$$

Es gilt $\varphi = 0$ auf V und daher

$$v = u - \varphi = u \quad \text{auf } V. \quad (5.86)$$

Da $\text{supp } \varphi$ in U enthalten ist, gilt $\partial U \subseteq V$. Gemäss (5.86, 5.75) gilt daher

$$v = g \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.87)$$

Aus (5.83, 5.84, 5.85, 5.87) folgt, dass

$$\int_U f G^x dy = u(x) + \int_{\partial U} g \partial_\nu G^x dA,$$

d. h. (5.80) gilt. Das beweist Satz 5.15. \square

Mit Hilfe von Satz 5.15 können wir die Formeln in Satz 5.12 und in Satz 5.13 “herleiten”. Dazu suchen wir eine greensche Funktion G für den oberen Halbraum \mathbb{R}_+^n und den

Einheitsball B^n . Falls es eine Lösung u des Randwertproblems (5.74,5.75) gibt, dann ist diese gemäss Satz 5.15 durch die Formel (5.80) gegeben, in der die Greensche Funktion vorkommt, mindestens im Fall von B^n . (Der obere Halbraum \mathbb{R}_+^n ist nicht beschränkt. Daher sagt der Satz strikt genommen nichts. Er ist aber auch für \mathbb{R}_+^n als heuristische Methode hilfreich.)

Wir suchen also eine Funktion G , die (5.76,5.77) erfüllt. Als Kandidat dafür kommt die Funktion $G(x, y) := \Phi_n(x - y)$ in Frage, wobei Φ_n die Fundamentallösung (gegeben durch (5.51)) ist. Wir überprüfen (5.76). Sei $\varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R})$ eine Testfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
 - \int_U \Phi_n(x - y) \Delta \varphi(y) dy &= - \int_U \Phi_n(z) \Delta \varphi(x - z) dz \\
 &= - \Delta_x \int_U \Phi_n(z) \varphi(x - z) dz && \text{(ableiten unter dem Integral)} \\
 &= - \Delta_x \int_U \Phi_n(x - y) \varphi(y) dy \\
 &= \varphi(x) && \text{(gemäss Satz 5.9).}
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Die Bedingung (5.76) ist also erfüllt. Die Bedingung (5.77) ist jedoch nicht erfüllt. Die Idee ist, diesen ‘‘Fehler’’ dadurch zu beheben, dass wir eine harmonische Korrekturfunktion Ψ^x von Φ_n^x subtrahieren, welche mit Φ_n^x auf dem Rand ∂U übereinstimmt.

Wir betrachten jetzt zuerst den oberen Halbraum \mathbb{R}_+^n . Wir betrachten die Spiegelung in \mathbb{R}^n an der Hyperebene ⁸ $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, also die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Wir definieren die *Korrekturfunktion für den Halbraum* als

$$\Psi : \mathbb{R}_+^n \times \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi^x(y) := \Psi(x, y) := \Phi_n(y - \tilde{x}).$$

Definition 5.16 (greensche Funktion für \mathbb{R}_+^n). *Wir definieren die greensche Funktion für \mathbb{R}_+^n als*

$$G := G_{\mathbb{R}_+^n} : \mathbb{R}_+^n \times \overline{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y) := \Phi_n(y - x) - \Psi(x, y) = \Phi_n(y - x) - \Phi_n(y - \tilde{x}). \tag{5.89}$$

Wir schreiben $\nu : \partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf dem Rand des oberen Halbraums. Wir definieren den *Poissonkern für \mathbb{R}_+^n* wie in (5.68).

⁸Mit einer Hyperebene meinen wir einen (möglicherweise verschobenen) linearen Unterraum von \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$. Im Fall $n = 2$ ist das eine Gerade und im Fall $n = 3$ eine Ebene.

Satz 5.17 (greensche Funktion und Poissonkern für \mathbb{R}_+^n). (i) Die Funktion $G_{\mathbb{R}_+^n}$ ist eine greensche Funktion, d. h., sie erfüllt (5.76, 5.77).

(ii) Es gilt

$$-\partial_\nu G_{\mathbb{R}_+^n}^x = -\nabla G_{\mathbb{R}_+^n}^x \cdot \nu = K_{\mathbb{R}_+^n}^x : \partial\mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Beweis: Übungsserie 11 (Greensche Funktion für den oberen Halbraum).

Bemerkung. [greensche Funktion und Poissonkern für \mathbb{R}_+^n] Sei $g : \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für die (homogene) Laplacegleichung für eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^n, \quad (5.90)$$

$$u(x) \rightarrow g(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \quad (5.91)$$

Wir definieren die Funktion $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (5.69), d. h.

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) g(y) dy. \quad (5.92)$$

Gemäss Satz 5.12 (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum) löst u das Randwertproblem (5.90, 5.91). Andererseits ist gemäss Satz 5.17(i) die Funktion $G := G_{\mathbb{R}_+^n}$ eine greensche Funktion für \mathbb{R}_+^n . Für ein *beschränktes* C^1 -Gebiet U besagt Satz 5.15 (Darstellung der Lösung des Randwertproblems mittels Greenscher Funktion), dass jede Lösung u des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U, \quad (5.93)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U \quad (5.94)$$

gegeben ist durch

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \partial_\nu G^x(y) dA(y) + \int_U f(y) G(x, y) dy, \quad \forall x \in U, \quad (5.95)$$

falls G eine greensche Funktion für U ist. Diese Darstellungsformel für u stimmt auch im Fall des *unbeschränkten* Gebietes $U = \mathbb{R}_+^n$ mit der Lösungsformel aus Satz 5.12, also (5.92), überein (mit $G = G_{\mathbb{R}_+^n}$ und $f \equiv 0$). Für u gegeben durch (5.95) mit $f \equiv 0$ und $x \in \mathbb{R}_+^n$ gilt nämlich, dass

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} g(y) \partial_\nu G^x(y) dA(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) g(y) dy \quad (\text{gemäss Satz 5.17(ii)}), \end{aligned}$$

d. h. u ist durch (5.92) gegeben, wie behauptet. Damit haben wir die Lösungsformel aus Satz 5.12 wie gewünscht “hergeleitet”.

Bemerkung 5.18. [greensche Funktion auf dem Halbraum und Spiegelladung] Wir betrachten eine unendlich dünne unendlich grosse geerdete Metallplatte, welche die (x_1, x_2) -Ebene im Raum \mathbb{R}^3 ausfüllt. Wir bringen ein Punktteilchen mit Ladung q in einem Punkt x im oberen Halbraum \mathbb{R}_+^3 an.

Problem: Bestimme das elektrostatische Potential φ .

Lösung: Die Ladungsdichte des Teilchens ist durch $\rho = q\delta_x$ gegeben, wobei δ_x die “um x zentrierte δ -Funktion” ist. Gemäss einer Aufgabe in Übungsserie 8 (elektrostatisches Potential, Poissongleichung) erfüllt φ die Poissongleichung

$$-\Delta\varphi = f := \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta_x \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^3. \quad (5.96)$$

Das geladene Teilchen bewirkt eine Verschiebung der freien Elektronen in der Metallplatte. (Das wird als elektrische Influenz bezeichnet.) Nach einer kurzen Zeit stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei dem die elektrische Feldstärke \mathbf{E} senkrecht auf der Metallplatte steht. (Solange das nicht der Fall ist, bewirkt \mathbf{E} nämlich eine weitere Verschiebung der freien Elektronen.) Da $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, bedeutet das, dass φ auf der Metallplatte konstant ist. Da es sich um eine geerdete Platte handelt, gilt

$$\varphi = 0 \quad \text{auf der Platte, also auf } \partial\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \quad (5.97)$$

Wir bezeichnen mit $G = G_{\mathbb{R}_+^3}$ die greensche Funktion des Halbraums, gegeben durch (5.89). Gemäss Satz 5.17(i) erfüllt die Funktion $\frac{q}{\varepsilon_0}G^x$ das Randwertproblem (5.96,5.97). Tatsächlich ist das elektrostatische Potential gegeben durch

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}G^x = \frac{q}{\varepsilon_0}\Phi_3(\bullet - x) - \frac{q}{\varepsilon_0}\Phi_3(\bullet - \tilde{x}).$$

Interpretation dieser Lösung: Der erste Term,

$$\frac{q}{\varepsilon_0}\Phi_3(\bullet - x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\bullet - x\|}$$

ist das Coulombpotential des geladenen Teilchens im Punkt x . Den zweiten Term, $-\frac{q}{\varepsilon_0}\Phi_3(\bullet - \tilde{x})$, können wir als das Coulombpotential eines Punktteilchens mit Ladung $-q$ interpretieren, das sich im Punkt \tilde{x} befindet. Das ist der an der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gespiegelte Punkt x . Dieses geladene Teilchen heisst darum *Spiegelladung*. Es existiert in der Realität nicht, aber das durch die Ladungsverteilung auf der Metallplatte erzeugte Potential im oberen Halbraum \mathbb{R}_+^3 entspricht demjenigen, das durch das geladene Teilchen in x und die Spiegelladung in \tilde{x} erzeugt wird.

Spiegelladungen werden in der Elektrostatik verwendet, um das elektrische Potential bei elektrischer Influenz zu finden.

Wir betrachten jetzt den Einheitsball $B^n = B_1^n(0)$ für $n \geq 3$. Um die Formel in Satz 5.13 mit Hilfe von Satz 5.15 “herzuleiten”, suchen wir eine greensche Funktion für B^n . Als Kandidat dafür kommt wieder die Funktion $G(x, y) := \Phi_n(x - y)$ in Frage. Wie wir in (5.88) gesehen haben, erfüllt diese Funktion tatsächlich (5.76), jedoch nicht die Bedingung (5.77). Um diesen “Fehler” zu beheben, subtrahieren wir wiederum eine harmonische Korrekturfunktion Ψ^x von Φ_n^x , welche mit Φ_n^x auf dem Rand ∂U übereinstimmt. Dazu verwenden wir die folgende Definition.

Definition 5.19 (Spiegelung an der Sphäre). *Wir definieren die Spiegelung an der Einheitssphäre (oder Inversion) in n Dimensionen als die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \tilde{x} := \frac{x}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Bemerkungen. [Spiegelung an der Sphäre]

- Die Punkte x und \tilde{x} liegen auf demselben Strahl durch den Ursprung 0 .
- Die Radien von x und \tilde{x} sind invers zu einander
- Die Punkte auf der Einheitssphäre S^{n-1} bleiben unter dieser Abbildung fest.

Wir definieren die *Korrekturfunktion für die Einheitssphäre* als

$$\Psi : B^n \times \overline{B}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi^x(y) := \Psi(x, y) := \Phi_n(\|x\|(y - \tilde{x})) = \|x\|^{2-n} \Phi_n(y - \tilde{x}).$$

Definition 5.20 (greensche Funktion für B^n). *Wir definieren die greensche Funktion für B^n als*

$$G := G_{B^n} : B^n \times \overline{B}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y) := \Phi_n(y-x) - \Psi(x, y) = \Phi_n(y-x) - \Phi_n(\|x\|(y-\tilde{x})). \quad (5.98)$$

Wir schreiben $\nu : \partial B^n = S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf dem Rand des Einheitsballes. Wir definieren den *Poissonkern für B^n* wie in (5.72).

Satz 5.21 (greensche Funktion und Poissonkern für B^n). *(i) Die Funktion G_{B^n} ist eine greensche Funktion, d. h., sie erfüllt (5.76, 5.77).*

(ii) Es gilt

$$-\partial_\nu G_{B^n}^x = -\nabla G_{B^n}^x \cdot \nu = K_{B^n}^x : \partial B^n = S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in B^n.$$

Beweis: Übungsserie 11 (Greensche Funktion für den Einheitsball).

Bemerkung. [greensche Funktion und Poissonkern für B^n] Sei $g : S^{-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $u \in C^2(\overline{B}^n, \mathbb{R})$ eine Lösung des folgenden Randwertproblem für die (homogene) Laplacegleichung gegeben durch

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } B^n, \tag{5.99}$$

$$u(x) \rightarrow g(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad \forall x_0 \in \partial B^n = S^{n-1}. \tag{5.100}$$

Dann löst u das Randwertproblem (5.74,5.75) mit $U = B^n$, $f = 0$. Gemäss Satz 5.21(i) ist die Funktion $G := G_{B^n}$ eine greensche Funktion für B^n . Daher besagt der Satz 5.15 (Darstellung der Lösung des Randwertproblems mittels greenscher Funktion), dass für jedes $x \in B^n$ gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial B^n} g(y) \partial_\nu G^x(y) dA(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} K_{B^n}(x, y) g(y) dA(y) \quad (\text{gemäss Satz 5.21(ii)}). \end{aligned}$$

Das stimmt mit der Lösungsformel aus Satz 5.13 (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball) überein. Damit haben wir diese Lösungsformel wie gewünscht “hergeleitet”.

Bemerkung. [greensche Funktion auf dem Einheitsball und Spiegelladung] Wir betrachten eine geerdete metallene Hohlkugel, d. h. eine unendlich dünne metallene Kugelschale, um den Ursprung im Raum \mathbb{R}^3 mit Radius 1. Wir bringen ein Punktteilchen mit Ladung q im Punkt x im Einheitsball B^3 an.

Problem: Bestimme das elektrostatische Potential φ .

Lösung: Wie in Bemerkung 5.18 bewirkt das geladene Teilchen eine Verschiebung der freien Elektronen in der metallenen Hohlkugel (elektrische Influenz). Im Gleichgewichtszustand erfüllt das Potential das folgende Randwertproblem für die Poissongleichung:

$$-\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta_x \quad \text{auf } B^n, \tag{5.101}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial B^n. \tag{5.102}$$

Wir bezeichnen mit $G = G_{B^3}$ die greensche Funktion des Einheitsball, gegeben durch (5.98). Gemäss Satz 5.21(i) erfüllt die Funktion $\frac{q}{\varepsilon_0} G^x$ das Randwertproblem (5.101,5.102). Tatsächlich ist das elektrostatische Potential gegeben durch

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0} G^x = \frac{q}{\varepsilon_0} \Phi_3(\cdot - x) - \frac{q}{\varepsilon_0 \|x\|} \Phi_3(\cdot - \tilde{x}).$$

Interpretation dieser Lösung: Den zweiten Term, $-\frac{q}{\varepsilon_0 \|x\|} \Phi_3(\cdot - \tilde{x})$, können wir als das Coulombpotential eines Punktteilchens mit Ladung $-\frac{q}{\|x\|}$ interpretieren, das sich im

Punkt \tilde{x} befindet. Das ist der an der Sphäre S^2 gespiegelte Punkt x . Dieses geladene Teilchen heisst daher *Spiegelladung*. Es existiert in der Realität nicht, aber das durch die Ladungsverteilung auf der Hohlkugel erzeugte Potential im Einheitsball B^3 entspricht demjenigen, das durch das geladene Teilchen in x und die Spiegelladung in \tilde{x} erzeugt wird.

5.7 Energiemethoden, Dirichletprinzip

Seien $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Wir betrachten das Randwertproblem für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U, \quad (5.103)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial U. \quad (5.104)$$

In Korollar 5.7 haben wir gezeigt, dass es höchstens eine stetige Funktion $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die auf U C^2 ist und das Randwertproblem (5.103,5.104) löst. Die Lösung dieses Problems ist also eindeutig (falls sie existiert). Das Korollar folgt direkt aus dem Maximumprinzip für eine harmonische Funktion.

In diesem Abschnitt werden wir die Eindeutigkeit der Lösung nochmals mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß beweisen (unter zusätzlichen Voraussetzungen, siehe Satz 5.22 unten). Wir werden auch zeigen, dass die Lösungen des Randwertproblems (5.103,5.104) gerade die Minimalstellen eines *Dirichlet-Funktional*s sind. Das ist das *Dirichletprinzip*.

Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblem für die Poissongleichung, Divergenzsatz von Gauß

Satz 5.22 (Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblem für die Poissongleichung). *Wir nehmen an, dass $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet ist. Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\bar{U})$ des Randwertproblems (5.103,5.104).*

Bemerkung. Dieser Satz folgt aus Korollar 5.7. (Seine Voraussetzungen sind stärker als die des Korollars.)

Beweis des Satzes 5.22 mittels des Divergenzsatzes von Gauß: Fall, dass U wegzusammenhängend ist: Seien $u, \tilde{u} \in C^2(\bar{U})$ Lösungen des Randwertproblems (5.103,5.104). Wir definieren

$$v := \tilde{u} - u.$$

$$\begin{aligned}
0 &= f - f \\
&= -\Delta\tilde{u} + \Delta u \quad (\text{gemäss (5.103)}) \\
&= -\Delta v, \\
\text{also } 0 &= -\int_U v\Delta v \\
&= -\int_U \nabla \cdot (v\nabla v) + \int_U \nabla v \cdot \nabla v \\
&= -\int_{\partial U} (v\nabla v) \cdot \nu \, dA + \int_U \|\nabla v\|^2. \tag{5.105}
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit bezeichnet ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf ∂U . Wir haben hierbei den Divergenzsatz von Gauß angewendet. Da u, \tilde{u} die Randbedingung (5.104) lösen, verschwindet $v = \tilde{u} - u$ auf dem Rand ∂U . Der erste Term in (5.105) verschwindet daher. Aus dieser Gleichheitskette erhalten wir daher

$$0 = \int_U \|\nabla v\|^2.$$

Daraus folgt, dass $\nabla v = 0$ auf U . Da U gemäss Annahme wegzusammenhängend ist, folgt, dass v auf U konstant ist. (Warum?) Da v stetig ist, ist es auch auf \bar{U} konstant. Da $v = 0$ auf ∂U , folgt daraus, dass $v = 0$, d. h. $\tilde{u} = u$, auf \bar{U} . Das beweist Satz 5.22 im Fall, dass U wegzusammenhängend ist. Die allgemeine Situation kann auf diesen Fall reduziert werden. \square

Poissongleichung, Minimalstellen des Dirichlet-Funktional, Dirichletprinzip

Wir nehmen an, dass $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet ist und dass f stetig und beschränkt ist.

Definition 5.23. (i) Wir definieren die zu g gehörige zulässige Menge (von Funktionen) als

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_g := \{u \in C^2(\bar{U}) \mid u = g \text{ auf } \partial U\}. \tag{5.106}$$

(ii) Wir definieren das Dirichlet-Funktional als die Abbildung

$$S := S_{f,g} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(u) := \int_U \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - uf \right) \tag{5.107}$$

Bemerkungen 5.24. [Dirichlet-Funktional, elektrostatische Energie]

- (i) In der Elektrostatik ist die im elektrischen Feld gespeicherte Energie gegeben durch

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{E} = -\nabla\varphi\|^2 = \varepsilon_0 S_{f=0,g}(u = \varphi),$$

wobei φ das elektrostatische Potential ist. Im Fall $f = 0$ ist das Dirichlet-Funktional $S_{0,g}$ für das Gebiet $U := \mathbb{R}^3$ also proportional zur elektrostatischen Energie. Für $f \neq 0$ enthält es jedoch den Zusatzterm $-\int_U uf$.

- (ii) In manchen Büchern wird der Term *Dirichlet-Funktional* nur im Fall $f = 0$ verwendet.
- (iii) In der mathematischen Literatur wird das Funktional (5.107) oft *Energie-Funktional* genannt. Das ist irreführend, da es in physikalischen Anwendungen nicht immer die Bedeutung einer Energie hat. (Vergleiche mit Bemerkung (i).)

Satz 5.25 (Dirichletprinzip). (i) Falls $u \in C^2(\overline{U})$ das Randwertproblem (5.103, 5.104) für die Poissongleichung löst, dann ist u eine Minimalstelle von S , d. h.

$$S(u) \leq S(v), \quad \forall v \in \mathcal{A}.$$

(ii) Falls $u \in \mathcal{A}$ eine Minimalstelle von S ist, dann löst u das Randwertproblem (5.103, 5.104).

Bemerkung. [Dirichlet-Funktional, Elektrostatik] Gemäss Bemerkung 5.24 ist für S gegeben durch (6.11) mit $f = 0$ der Ausdruck $\varepsilon_0 S_{f=0,g}(u = \varphi)$ die im elektrischen Feld gespeicherte Energie. Da das elektrostatische Potential φ die Poissongleichung $-\Delta\varphi = f := \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ löst, ist φ gemäss Satz 5.25(i) eine Minimalstelle der Feldenergie bei vorgegebenen Randwerten, falls $\rho = 0$, d. h., im Vakuum.

Im Beweis von Teil (i) des Satzes 5.25 werden wir den folgenden Hilfssatz verwenden.

Hilfssatz 5.26 (Ungleichung für inneres Produkt von Vektoren). Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|v \cdot w| \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |v \cdot w| &\leq \|v\| \|w\| && \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der linearen Algebra)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 && \text{(youngsche Ungleichung für Zahlen aus Analysis 1)} \end{aligned}$$

Das beweist Hilfssatz 5.26. \square

Beweis von Teil (i) des Satzes 5.25: : Sei $v \in \mathcal{A}$. Da u die Gleichung (5.103) löst, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (-\Delta u - f)(u - v) \\ &= \int_U \left(-\nabla \cdot (\nabla u (u - v)) + \nabla u \cdot \nabla(u - v) - f(u - v) \right) \\ &= - \int_{\partial U} \nabla u \cdot \nu (u - v) dA + \int_U \left(\nabla u \cdot \nabla(u - v) - f(u - v) \right). \end{aligned} \quad (5.108)$$

In der letzten Gleichheit bezeichnet ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf ∂U . Wir haben hierbei den Divergenzatz von Gauß angewendet. Da u die Randbedingung (5.104) löst und $v \in \mathcal{A}$, gilt $u - v = g - g = 0$ auf ∂U . Der erste Term in (5.108) verschwindet daher. Aus dieser Gleichheitskette erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \int_U (\|\nabla u\|^2 - uf) &= \int_U (\nabla u \cdot \nabla v - vf) \\ &\leq \int_U \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \int_U \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - vf \right) \quad (\text{gemäss Hilfssatz 5.26}), \\ \text{also } S(u) &= \int_U \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - uf \right) \\ &\leq S(v). \end{aligned}$$

Das beweist Teil (i) des Satzes 5.25. \square

Teil (ii) folgt aus *Variationsrechnung*, siehe S. 175 im nächsten Kapitel.

Kapitel 6

Variationsrechnung, Prinzip der stationären Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung

Variationsrechnung befasst sich mit Funktionalen, d. h. Funktionen, die als Argument eine Funktion haben. Ziele der Variationsrechnung sind es, die “kritischen Punkte” (also zum Beispiel Maxima und Minima) eines gegebenen Funktionals zu beschreiben und zu zeigen, dass “kritischen Punkte” existieren.

Das *Prinzip der stationären Wirkung* ist ein physikalischer Grundsatz, der besagt, dass eine gegebene physikalische Grösse, aufgefasst als eine Funktion der Zeit oder des Orts, ein stationärer (=kritischer) Punkt eines *Wirkungsfunktional*s ist.¹ Ein Beispiel dafür ist das *Hamiltonsche Prinzip*. Dieses Prinzip beschreibt die *Dynamik* eines klassischen mechanischen Systems. Es besagt, dass die Bahn eines solchen Systems ein kritischer Punkt des Wirkungsfunktionalen ist, bei vorgegebenen Endpunkten.

Ein anderes physikalisches Prinzip besagt, dass in vielen Situationen ein *statisches physikalisches System* sich in einem Zustand befindet, in dem die Energie lokal minimal ist. (Das gilt zum Beispiel für eine Kugel auf der Erdoberfläche unter dem Einfluss der Schwerkraft.) Als ein anderes Beispiel ist das elektrostatische Potential φ im Vakuum eine Minimalstelle (also ein kritischer Punkt) der elektrostatischen Energie, mit festen Randwerten. Das folgt aus Satz 5.25 und der Tatsache, dass φ die Poissongleichung mit Inhomogenität $f = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ löst.

Eine Funktion ist genau dann ein kritischer Punkt des Wirkungsfunktionalen, falls sie die *Euler-Lagrange-Gleichung* löst. Zum Beispiel ist für das Dirichlet-Funktional (6.11)

¹Stattdessen wird manchmal das *Prinzip der kleinsten Wirkung* als physikalischer Grundsatz bezeichnet. Dieses Prinzip besagt, dass eine gegebene physikalische Grösse die Wirkung *minimiert*. Das ist jedoch nicht immer der Fall.

die Euler-Lagrange-Gleichung gerade die Poisson-Gleichung.

In der Vorlesung *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (RW, Grundlagenfach) wird Variationsrechnung vertieft behandelt.

6.1 Lagrange-Funktion, Wirkungsfunktional, Euler-Lagrange-Gleichung, Anwendung auf klassische Mechanik und den elektrischen Schwingkreis

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet und

$$L \in C^2(\bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

eine Funktion. Wir nennen L die *Lagrangefunktion*. Wir verwenden die Notation

$$(x, y, \xi) = (x_1, \dots, x_n, y, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Sei $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die zu g gehörige zulässige Menge (von Funktionen) wie in (5.106).

Definition 6.1 (Wirkung). *Wir definieren die zu L, g gehörige Wirkung (oder das zu L, g gehörige Wirkungsfunktional) als die Abbildung*

$$S := S_{L,g} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(u) := \int_U L(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx. \quad (6.2)$$

Definition 6.2. (i) *Eine (C^2 -)Familie (oder Schar) (reellwertiger) Funktionen auf \bar{U} ist ein Paar (J, u^*) , wobei J ein offenes Intervall ist, das 0 enthält, und*

$$u^* : J \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, x) \mapsto u^a(x),$$

eine C^2 -Funktion ist.

(ii) *Sei $u \in C^2(\bar{U})$. (C^2 -)Variation von u ist eine Familie u^* von Funktionen auf \bar{U} , sodass*

$$u^0 = u, \quad (6.3)$$

$$u^a = u \quad \text{auf } \partial U, \quad \forall a \in J. \quad (6.4)$$

(iii) *Ein "kritischer Punkt" (oder "stationärer Punkt") von S ist eine Funktion $u \in \mathcal{A}$, sodass*

$$\left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} S(u^a) = 0, \quad \forall \text{ Variation } u^* \text{ von } u. \quad (6.5)$$

Bemerkungen. • Die Funktion $a \mapsto S(u^a)$ ist differenzierbar. (Das folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz aus der Masstheorie.) Daher ist die Ableitung (6.5) sinnvoll.

- Heuristisch bedeutet die Bedingung (6.5), dass die totale Ableitung von S an der Stelle u verschwindet, d. h.

$$“DS(u) = 0, ”$$

d. h., dass u ein kritischer Punkt im Sinn von Analysis 2 ist. Wir denken uns die Menge \mathcal{A} dazu als eine Mannigfaltigkeit² und fassen die Variation u' als einen Weg in \mathcal{A} auf, der zum Zeitpunkt $a = 0$ durch den “Punkt” u geht. Wir schreiben für die Ableitung nach a . Wegen der “Kettenregel” und der Bedingung (6.3) gilt

$$“ \left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} S(u^a) = DS(u) \left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} u^a. ”$$

Dieser Ausdruck ist genau dann gleich 0 für jeden Weg u' , der für $a = 0$ durch u geht, falls $DS(u) = 0$, wie behauptet.

- Diese Heuristik ist mathematisch nicht präzise, da \mathcal{A} keine endlich dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ein “kritischer Punkt” von S kann allerdings tatsächlich als kritischer Punkt interpretiert werden, indem wir die Menge \mathcal{A} mit einer geeigneten Struktur einer *unendlich*-dimensionalen Mannigfaltigkeit ausstatten. Wir tun das aber nicht, da das hier nicht nötig ist.

Definition 6.3. Die Euler-Lagrange-Gleichung zu L ist die partielle Differentialgleichung für eine Funktion $u \in C^2(U)$ gegeben durch

$$- \sum_{i=1}^n (L_{\xi_i}(\cdot, u, \nabla u))_{x_i} + L_y(\cdot, u, \nabla u) = 0. \quad (6.6)$$

Diese Gleichung ist nach Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange benannt. (Siehe Abbildungen 6.1 und 6.2.)

Bemerkungen. [Euler-Lagrange-Gleichung]

- Wir verwenden hier die Notation (6.1).
- Der Ausdruck $L_{\xi_i}(\cdot, u, \nabla u)$ in (6.6) ist die Funktion $U \ni x \mapsto L_{\xi_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \in \mathbb{R}$. Diese Funktion leiten wir nach der Variable x_i ab.

²Denken Sie hierbei an eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .



Abbildung 6.1: Leonhard Euler, 1707–1783, Schweizer Mathematiker und Physiker.



Abbildung 6.2: Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813, italienischer Mathematiker und Astronom.

- Die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für alle $i, j = 1, \dots, n$ enthält die linke Seite nämlich den Term $-L_{\xi_i \xi_j}(\cdot, u, \nabla u) u_{x_j x_i}$. Im Allgemeinen ist die Euler-Lagrange-Gleichung nicht linear.

Satz 6.4 (“kritischer Punkt” der Wirkung und Euler-Lagrange-Gleichung). *Eine Funktion $u \in \mathcal{A}$ ist genau dann ein “kritischer Punkt” von S , falls sie die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) erfüllt.*

Korollar 6.5 (Extremalstelle der Wirkung und Euler-Lagrange-Gleichung). *Falls eine Funktion $u \in \mathcal{A}$ eine Extremalstelle von S ist, dann erfüllt sie die Euler-Lagrange-Gleichung.*

Beweis des Korollars 6.5: **Fall**, dass u eine Maximalstelle ist: Sei (J, u^*) eine Variation von u . Wir definieren die Funktion

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(a) := S(u^a).$$

Gemäss (6.3) gilt $u = u^0$. Es folgt, dass $a = 0$ eine Maximalstelle von f ist. Gemäss dem Satz von Fermat über kritische Punkte aus Analysis 1 ist $a = 0$ daher ein kritischer Punkt von f , d. h. $0 = \dot{f}(0) = \left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} S(u^a)$. Das bedeutet, dass u ein “kritischer Punkt” von S ist. Gemäss Satz 6.4 erfüllt u daher die Euler-Lagrange-Gleichung. Das beweist das Korollar 6.5. \square

Im Beweis des Satzes 6.4 werden folgenden Hilfssatz verwenden.

Hilfssatz 6.6 (Hauptlemma der Variationsrechnung). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\bar{U})$ eine Funktion, sodass

$$\int u\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) \mid \text{supp } \varphi \text{ kompakt, } \text{supp } \varphi \subseteq U\}.$$

Dann gilt $u = 0$.

Beweis des Satzes 6.4: Sei u' eine Variation von u . Wir schreiben

$$\partial_y^u L := \partial_y L(\cdot, u, \nabla u) \quad \text{usw.}$$

Wir schreiben

$$D_\xi L(x, y, \xi) := D(L(x, y, \cdot))(\xi)$$

und ν für das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf ∂U . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} S(u^a) &= \int_U \partial_a (L(\cdot, u', \nabla u')) \quad (\text{Ableiten unter dem Integral}) \\ &= \int_U \left(\partial_y^u L \partial_a u' + \sum_{i=1}^n \partial_{\xi_i}^u L \partial_a \partial_{x_i} u' \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \int_U \sum_{i=1}^n \partial_{\xi_i}^u L \partial_{x_i} \partial_a u' &= \int_U \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{\xi_i}^u L \partial_a u') - \partial_{x_i} (\partial_{\xi_i}^u L) \partial_a u' \right) \\ &= \int_{\partial U} D_\xi^u L \nu \partial_a u' dA - \int_U \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{\xi_i}^u L) \partial_a u' \end{aligned} \quad (6.8)$$

(wegen des Divergenzsatzes von Gauß)

$$\int_{\partial U} D_\xi^u L \nu \partial_a u' dA = 0 \quad (\text{da } \partial_a u' = 0 \text{ auf } \partial U \text{ wegen (6.4)}). \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} S(u') &= \int_U \left(\partial_y^u L - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{\xi_i}^u L) \right) \partial_a u' \\ &\quad (\text{wegen (6.7), Vertauschen von } \partial_a, \partial_{x_i}, \text{ (6.8,6.9)}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Wir nehmen an, dass $u \in \mathcal{A}$ die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) erfüllt. Sei u' eine Variation von u . Aus (6.10, (6.3)) folgt, dass $\frac{d}{da} S(u^a) \Big|_{a=0} = 0$. Daher ist u ein "kritischer Punkt" von S .

Wir nehmen jetzt an, dass u ein "kritischer Punkt" von S ist. Sei $v \in C^2(\bar{U})$ eine Funktion, sodass $v = 0$ auf ∂U . Wir definieren

$$u' : \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u^a(x) := u(x) + av(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}, x \in \bar{U}.$$

Das ist eine Variation von u . Da u ein “kritischer Punkt” von S ist, gilt daher

$$0 = \left. \frac{d}{da} \right|_{a=0} S(u^a).$$

Mittels (6.10) und der Gleichheit $\partial_a|_{a=0} u^a = v$ erhalten wir daraus, dass

$$0 = \int_U \left(\partial_y^{u^0=u} L - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{\xi_i}^{u^0=u} L) \right) v.$$

Mittels (6.3) und des Hauptlemmas der Variationsrechnung (Lemma 6.6) folgt daraus, dass u die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) erfüllt.

Das beweist Satz 6.4. \square

Beispiel 6.7. [“kritischer Punkt” der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Dirichlet-Funktional] Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L : \bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \xi) := \frac{1}{2} \|\xi\|^2 - yf(x).$$

Die zugehörige Wirkung ist gegeben durch

$$S : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(u) = \int_U \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - uf \right), \quad (6.11)$$

d. h. durch das Dirichlet-Funktional (6.11). Es gilt

$$L_{\xi_i}(x, y, \xi) = \xi_i, \quad L_y(x, y, \xi) = -f(x), \quad \forall x \in \bar{U}, y \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{i=1}^n (L_{\xi_i}(\bullet, u, \nabla u))_{x_i} + L_y(\bullet, u, \nabla u) \\ &= - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \partial_{x_i} u - f \\ &= -\Delta u - f. \end{aligned}$$

Das ist die Poissongleichung. Gemäss Satz 6.4 und der Definition (5.106) von \mathcal{A}_g löst eine Funktion $u \in C^2(\bar{U})$ also genau dann das Randwertproblem für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f, \quad u = g \text{ auf } \partial U,$$

falls sie ein “kritischer Punkt” des Dirichlet-Funktional (6.11) ist.

Wir können jetzt Teil (ii) des Satzes 5.25 (Dirichletprinzip) beweisen. **Beweis von Teil (ii) des Satzes 5.25:** Das folgt aus Korollar 6.5 und Beispiel 6.7. \square

Beispiele. [“kritischer Punkt” der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Teilchen auf einer Geraden, elektrischer Schwingkreis]

(i) (Teilchen auf einer Geraden) Wir betrachten ein Teilchen der Masse m auf der Geraden \mathbb{R} unter dem Einfluss einer zeitabhängigen Kraft \mathbf{F} . Wir schreiben:

- $t :=$ Zeit
- $q \in \mathbb{R}$: Ort des Teilchens
- $v \in \mathbb{R}$: Geschwindigkeitsvektor des Teilchens

Wir nehmen an, dass F konservativ ist, d. h., es gibt eine glatte Funktion $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für $U^t := U(t, \cdot)$ gilt

$$F^t = -\nabla U^t = -(U^t)'.$$

U ist die potentielle Energie des Teilchens.

Dieses System kann mittels Variationsrechnung beschrieben werden. Die Dimension n ist hier gleich 1. Seien $t_0 < t_1$ reelle Zahlen. Eine Lagrangefunktion für das System ist gegeben durch

$$L : (t_0, t_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(t, q, v) := \frac{m}{2}|v|^2 - U^t(q)$$

= kinetische Energie – potentielle Energie.

Sei $g : \partial(t_0, t_1) = \{t_0, t_1\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $q_i := g(t_i)$, für $i = 0, 1$. Die zulässige Menge von Funktionen wie in (5.106) ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \{q \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}) \mid q(t_i) = g(t_i) = q_i, \forall i = 0, 1\}.$$

Das Wirkungsfunktional (6.2) ist gegeben durch

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - U_t(q(t)) \right) dt.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) für L ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(L_v(\bullet, q, \dot{q})\right)_t + L_q(\bullet, q, \dot{q}) \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{m}{2} 2\dot{q} - (U^t)' \circ q \\ &= -m\ddot{q} + \mathbf{F}^t \circ q, \end{aligned}$$

d. h. $\mathbf{F}^t \circ q = m\ddot{q},$

d. h., Kraft gleich Masse mal Beschleunigung. Das ist das zweite Newtonsche Gesetz.

Bemerkungen:

- In diesem Beispiel ist die Dimension $n = 1$ und die Euler-Lagrange-Gleichung daher eine *gewöhnliche* Differentialgleichung. Ihre Ordnung ist zwei.
 - Wir können den Formalismus der Variationsrechnung so verallgemeinern, dass wir damit auch ein Teilchen in \mathbb{R}^3 beschreiben können. Wir können damit sogar sehr viele mechanische Systeme beschreiben, zum Beispiel den starren Körper. Diese Beschreibung heisst *Lagrangesche Mechanik*.
- (ii) (elektrischer Schwingkreis) Wir betrachten einen elektrischen Schwingkreis, der aus einem Kondensator und einer Spule besteht, die parallelgeschaltet sind. Dieses System kann mittels Variationsrechnung beschrieben werden. Dazu schreiben wir:

- $t :=$ Zeit
- $Q :=$ Ladung des Kondensators
- $I :=$ Stromstärke
- $C :=$ Kapazität des Kondensators
- $L :=$ Induktivität der Spule

Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, sodass $t_0 < t_1$. Wir definieren die *Lagrangefunktion*

$$\mathcal{L} : (t_0, t_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(t, Q, I) := \frac{L}{2}I^2 - \frac{1}{2C}Q^2.$$

Die beiden Terme haben die folgenden Bedeutungen:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2}I^2 &= \text{in Spule gespeicherte Energie des Magnetfeldes,} \\ \frac{1}{2C}Q^2 &= \text{im Kondensator gespeicherte Energie des elektrischen Feldes.} \end{aligned}$$

Sei $g : \partial(t_0, t_1) = \{t_0, t_1\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $Q_i := g(t_i)$, für $i = 0, 1$. Die *zulässige Menge* von Funktionen wie in (5.106) ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \left\{ Q \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}) \mid Q(t_i) = g(t_i) = Q_i, \forall i = 0, 1 \right\}.$$

Das Wirkungsfunktional (6.2) ist gegeben durch

$$S(Q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, Q(t), \dot{Q}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{L}{2} \dot{Q}^2 - \frac{1}{2C} Q^2 \right) dt.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (6.6) für \mathcal{L} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\mathcal{L}_I(\cdot, Q, \dot{Q})\right)_t + \mathcal{L}_Q(\cdot, Q, \dot{Q}) \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{L}{2} 2\dot{Q} - \frac{1}{2C} 2Q \\ &= -L\ddot{Q} - \frac{1}{C}Q, \\ \text{d. h.} \quad \ddot{Q} + \frac{1}{CL}Q &= 0. \end{aligned}$$

Das stimmt mit der gewöhnlichen Differentialgleichung für den elektrischen LC-Schwingkreis überein, die wir in Analysis 2 hergeleitet haben.

6.2 Anwendung der Variationsrechnung auf die Elektrodynamik, Maxwellgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen

Eine allgemeine Anwendung der Variationsrechnung liegt in der Elektrodynamik. In der Elektrodynamik wird die Zeitentwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes durch die *Maxwellgleichungen* beschrieben. Das ist das Gleichungssystem (1,2,3,4) für die elektrische Feldstärke und das magnetische Feld $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, d. h.:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (6.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.15)$$

Die *inhomogenen* Maxwellgleichungen sind das gaußsche Gesetz für das elektrische Feld (6.12) und das ampèresche Gesetz mit Maxwellschem Verschiebungsstrom 6.15. Diese zwei Maxwellgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für das *Viererpotential* für eine Lagrangefunktion, die Terme enthält, die dem elektrischen und magnetischen Feld entsprechen. Das Viererpotential ist aus dem *elektrischen Potential* und dem *magnetischen Vektorpotential* zusammengesetzt.

Um das zu erklären, schreiben wir

$$\varepsilon_0 := \text{elektrische Feldkonstante} \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{F m}^{-1}$$

$$\mu_0 := \text{magnetische Feldkonstante} \approx 1.3 \cdot 10^{-6} \text{N A}^{-2}$$

$$c := \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} \approx 3.0 \cdot 10^8 \text{m sec}^{-1}$$

ρ := Ladungsdichte

\mathbf{j} := Stromdichte

$$J := (J^\mu)_{\mu=0,\dots,3} := \text{Viererstromdichte} := \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$(x, A, \xi) = \left((x^\mu)_{\mu=0,\dots,3}, (A_\mu)_{\mu=0,\dots,3}, (\xi_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3} \right)$ für einen Punkt in $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{1 \times 4} \times \mathbb{R}^{4 \times 4}$,

$$x^0 = ct,$$

$$\varphi := cA_0, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{A} := (A^i)_{i=1,2,3} := \begin{pmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$x = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ ist ein Punkt in der Raumzeit \mathbb{R}^4 . $A = \left(\frac{\varphi}{c} \quad -\mathbf{A}^T \right)$ heisst das *Viererpotential*. Es ist aus dem *elektrischen Potential* φ und dem *Vektorpotential* \mathbf{A} aufgebaut. Wir definieren

$$\eta^{\mu\nu} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu = \nu = 0, \\ -1, & \text{falls } \mu = \nu \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\text{duale Minkowski-Metrik} := (\eta^{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,\dots,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden die *einsteinsche Summenkonvention*, d. h., wir summieren über Indizes, die doppelt, d. h. einmal oben und einmal unten auftreten. Wir schreiben also zum Beispiel

$$A_\mu J^\mu := \sum_{\mu=0}^3 A_\mu J^\mu.$$

Wir schreiben

$$\xi^\mu{}_\sigma := \eta^{\mu\rho} \xi_{\rho\sigma} = \sum_{\rho=0}^3 \eta^{\mu\rho} \xi_{\rho\sigma}, \quad \xi^{\mu\nu} := \eta^{\nu\sigma} \xi^\mu{}_\sigma = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \xi_{\rho\sigma}. \quad (6.20)$$

Wir definieren

$$L_{\text{field}}, L_{\text{int}} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{1 \times 4} \times \mathbb{R}^{4 \times 4} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$L_{\text{field}}(x, A, \xi) := -\frac{1}{4\mu_0} (\xi^{\mu\nu} - \xi^{\nu\mu}) (\xi_{\mu\nu} - \xi_{\nu\mu}) \quad (6.21)$$

$$L_{\text{int}}(x, A, \xi) := -A_\mu J^\mu \quad (6.22)$$

und die *Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes* als

$$L := L_{\text{field}} + L_{\text{int}}. \quad (6.23)$$

Für ein gegebenes Viererpotential $A = \left(\frac{\varphi}{c} \quad -\mathbf{A}^T\right) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 4}$ definieren wir

$$\mathbf{E} := \text{zu } A \text{ gehörige elektrische Feldstärke} := -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{B} := \text{zu } A \text{ gehöriges Magnetfeld} := \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.25)$$

Satz 6.8. *Die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Viererpotential $A = (A_\mu)_{\mu=0,\dots,3} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 4}$ bezüglich der Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen, d. h.*

$$-\sum_{\alpha=0,\dots,3} \partial_{x^\alpha} \left(\partial_{\xi_{\alpha\beta}} L(\cdot, A, DA) \right) + \partial_{A_\beta} L(\cdot, A, DA) = 0, \quad \forall \beta \in \{0, \dots, 3\} \quad (6.26)$$

$$\iff \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (6.27)$$

wobei \mathbf{E}, \mathbf{B} wie in ((6.24),(6.25)) definiert sind und $DA = (\partial_{x^\mu} A_\nu)_{\mu,\nu}$.

Bemerkung. [Euler-Lagrange-Gleichungen] In diesem Abschnitt ist das Argument des Wirkungsfunktionals eine Funktion $u = A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 4}$. Im Unterschied zu Abschnitt 6.1 ist der Zielraum dieser Funktion der Vektorraum $\mathbb{R}^{1 \times 4}$ statt \mathbb{R} . Die Gleichungen (6.26) sind daher Euler-Lagrange-Gleichungen in einem allgemeineren Sinn als (6.6). (Es gibt jetzt 4 solche Gleichungen. Das entspricht der Anzahl Komponenten von A .) Für diesen allgemeineren Begriff von Euler-Lagrange-Gleichungen gilt die Aussage von Satz 6.4 immer noch, d. h. die “kritischen Punkte” des Wirkungsfunktionals sind gerade die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Um diesen Satz zu beweisen, schreiben wir

$$\partial_\alpha := \partial_{x^\alpha}$$

und definieren wir für ein gegebenes Viererpotential $A = (A_\mu)_{\mu=0,\dots,3} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 4}$

$$F_{\mu\nu} := F_{\mu\nu}^A := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (6.28)$$

$$F := F^A := \text{elektromagnetischer Feldstärketensor} := (F_{\mu\nu})_{\mu\nu}$$

Bemerkung. [elektromagnetischer Feldstärketensor] Mittels (6.17,6.18,6.24,6.25) und der Gleichheit $\partial_0 = \partial_{x^0} = \frac{\partial t}{c}$ folgt, dass

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}^T/c & & \\ -\frac{\mathbf{E}}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ & B^3 & 0 & -B^1 \\ & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T/c & & \\ \frac{\mathbf{E}}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ & B^3 & 0 & -B^1 \\ & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Beweis des Satzes 6.8: Gemäss (6.21,6.20) gilt

$$L_{\text{field}}(x, A, \xi) = -\frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} (\xi_{\rho\sigma} - \xi_{\sigma\rho}) (\xi_{\mu\nu} - \xi_{\nu\mu}).$$

Mittels (6.19) folgt daraus, dass

$$\partial_{\xi_{\alpha\beta}} L_{\text{field}}(x, A, \xi) = -\frac{2}{4\mu_0} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) (\xi_{\mu\nu} - \xi_{\nu\mu}) = -\frac{2}{2\mu_0} (\xi^{\alpha\beta} - \xi^{\beta\alpha}). \quad (6.30)$$

Aus (6.23,6.22) folgt, dass

$$\partial_{\xi_{\alpha\beta}} L = \partial_{\xi_{\alpha\beta}} L_{\text{field}}.$$

Indem wir das mit (6.30) kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} -\partial_\alpha (\partial_{\xi_{\alpha\beta}} L(\cdot, A, DA)) &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \quad (\text{wobei } \partial^\alpha := \eta^{\alpha\mu} \partial_\mu) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \quad (\text{gemäss (6.28)}). \end{aligned}$$

Gemäss (6.22) gilt

$$\partial_{A_\beta} L(x, A, \xi) = -J^\beta.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} (-\partial_\alpha (\partial_{\xi_{\alpha\beta}} L(\cdot, A, DA)) + \partial_{A_\beta} L(x, A, DA))_\beta &= \left(\frac{1}{\mu_0} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - J^\beta \right)_\beta \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} - c\rho \\ \frac{1}{\mu_0} \left(-\partial_{x^0} \frac{\mathbf{E}}{c} + \nabla \times \mathbf{B} \right) - \mathbf{j} \end{array} \right) \quad (\text{wegen (6.29,6.16)}) \\ &= 0 \iff (6.26) \end{aligned}$$

Wegen $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ und $\partial_{x^0} = \frac{\partial_t}{c}$ sind die Euler-Lagrange-Gleichungen (6.26) daher äquivalent zu den Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = c^2 \mu_0 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Das sind die inhomogenen Maxwellgleichungen (6.27). Das beweist Satz 6.8. \square

Bemerkung. Die *homogenen* Maxwellgleichungen (6.13) (Gaußsches Gesetz für das magnetische Feld) und (6.14) (Faradaysches Induktionsgesetz) folgen aus der Definition ((6.24), (6.25)) von \mathbf{E} , \mathbf{B} . (Überprüfen Sie das!) Diese Gleichungen sind also automatisch erfüllt, falls das elektrische und magnetische Feld von einem Viererpotential kommen.

Literaturverzeichnis

- [AE09] Herbert Amann and Joachim Escher, *Analysis. III*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo. MR 2500068
- [AIJ24] Meike Akveld, Alessandra Iozzi, and Peter Jossen, *Komplexe analysis*.
- [Cho22] Rustum Choksi, *Partial differential equations. A first course*, Pure Appl. Undergrad. Texts, vol. 54, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2022 (English).
- [DL] Francesca Da Lio, *Mathematik iii-partielle differentialgleichungen, d-chem, skript*.
- [Eva10] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed. ed., Grad. Stud. Math., vol. 19, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010 (English).
- [Far93] Stanley J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers.*, rev. repr. of the 1982 orig. ed., New York, NY: Dover Publications, Inc., 1993 (English).
- [Fol92] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992. MR 1145236
- [Fol99] ———, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462
- [Gra] Vasile Gradinaru, *Lineare algebra für d-itet & rw, skript, 2024, eth zürich*.
- [Sch05] René L. Schilling, *Measures, integrals and martingales*, Cambridge University Press, New York, 2005. MR 2200059
- [Str] Michael Struwe, *Analysis für informatik, skript, 2010, eth zürich*.

- [Wid75] D. V. Widder, *The heat equation*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 67, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR 0466967