2.1. Komposition, Kettenregel und Transportgleichung.

(i) **(a)** Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

(b) Für $y \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(y^2) = y^2 + 1.$$

(c) Die zwei Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ sind nicht gleich, da zum Beispiel $g \circ f(1) = 4 \neq 2 = f \circ g(1)$.

(ii) **(a)** Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x, x^2) = \big(x^3, e^{x^2}\big).$$

(b) Die Verknüpfung $f \circ g$ ist nicht wohldefiniert, da der Zielraum von g, also $\mathbb{R}^2$, nicht gleich dem Definitionsbereich von f, also $\mathbb{R}$, ist.

(iii) **(a)** Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x, x^2) = x^3.$$

Ableiten nach x gibt

$$(g \circ f)'(x) = 3x^2. \tag{1}$$

(b) Wir haben $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$. Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir daher

$$f_1'(x) = 1, \qquad f_2'(x) = 2x.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion $g(y) := y_1 y_2$ sind gegeben durch

$$g_{y_1}(y) = y_2, \qquad g_{y_2}(y) = y_1.$$

Durch Anwenden der Kettenregel erhalten wir daher

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g_{y_1}(f(x)) f_1'(x) + g_{y_2}(f(x)) f_2'(x)\\ &= x^2 \cdot 1 + x \cdot 2x = 3x^2.\end{aligned}$$

Das stimmt mit (1) überein. Die Kettenregel stimmt also in diesem Beispiel. (Sie stimmt allgemein.)

(iv) Wir fixieren einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und definieren die Funktionen

$$\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{u}(t) := u(t,x) = g(x - tv), \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad f(t) := x - tv.$$

Wir haben

$$\widetilde{u} = g \circ f. \tag{2}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \widetilde{u}'(t) \\ &= \nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \qquad \text{(wegen (2) und der Kettenregel)} \\ &= \nabla g(x - tv) \cdot (-v). \end{aligned} \tag{3}$$

Wir zeigen, dass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$u_{x_i}(t,x) = g_{x_i}(x - tv). \tag{4}$$

Dazu betrachten wir zuerst den Fall $i = 1$. Wir fixieren $t, x_2, \dots, x_n$ und definieren die Funktionen

$$\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{u}(z) := u\big(t, z, x_2, \dots, x_n\big) = g\big(z - tv_1, x_2 - tv_2, \dots, x_n - tv_n\big), \tag{5}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(z) := \big(z - tv_1, x_2 - tv_2, \dots, x_n - tv_n\big). \tag{6}$$

Wir haben

$$\widetilde{u} = g \circ f. \tag{7}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_{x_1}(t,x) &= \widetilde{u}'(x_1) \\ &= \nabla g(f(x_1)) \cdot f'(x_1) \qquad \text{(wegen (7) und der Kettenregel)} \\ &= \nabla g(x - tv) \cdot \big(1, 0, \dots, 0\big) \\ &= g_{x_1}(x - tv). \end{aligned}$$

D. h. , (4) gilt für $i = 1$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass das für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt. Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \nabla u(t,x) :&= \big(u_{x_1}(t,x), \dots, u_{x_n}(t,x)\big) \\ &= \nabla g(x - tv). \end{aligned}$$

Indem wir das mit (3) kombinieren, erhalten wir

$$u_t(t,x) + v \cdot \nabla u(t,x) = -v \cdot \nabla g(x - tv) + v \cdot \nabla g(x - tv) = 0.$$

Also löst die Funktion u die Transportgleichung, wie behauptet.

Einfachere Herleitung von (4)**:** Wir betrachten zuerst den Fall $i = 1$. Wir fixieren $t, x_2, \ldots, x_n$ und definieren die Funktion $\widetilde{u}$ wie in (5) und

$$\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}(y) := g\big(y, x_2 - tv_2, \ldots, x_n - tv_n\big),$$
$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(z) := z - tv_1.$$

(Die Funktion $\widetilde{f}$ ist ähnlich wie f definiert (siehe (6)), aber nimmt Werte in $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{R}^n$ an.) Wir haben

$$\widetilde{u} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}. \tag{8}$$

Gemäss der Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\begin{aligned} u_{x_1}(t, x) &= \widetilde{u}'(x_1) \\ &= \widetilde{g}'(f(x_1)) \cdot \widetilde{f}'(x_1) \qquad \text{(wegen (8) und der Kettenregel)} \\ &= \widetilde{g}'(x - tv) \cdot 1 \\ &= g_{x_1}(x - tv). \end{aligned}$$

D. h. , (4) gilt für $i = 1$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass das für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Bemerkung: Der Vorteil dieser Herleitung von (4) ist, dass wir weniger rechnen müssen, da die Funktion $\widetilde{f}$ nur eine Komponente hat, statt n wie f. Andererseits entspricht die Herleitung mit f der Standardmethode. Die Methode mit $\widetilde{f}$ funktioniert nur, falls die betrachtete Variable (x_1) in der Definition von u nur in einem Argument von g vorkommt. (In unserem Fall ist das das erste Argument.)

2.2. Superpositionsprinzip und Wärmeleitungsgleichung.

(i) Sei $u(t, x) := e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$. Wir rechnen nach:

$$u_t(t, x) = -\xi^2 e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$$

und

$$\Delta u(t, x) = \Big(e^{-\xi^2 t} \xi \cos(\xi x)\Big)_x = e^{-\xi^2 t} \xi^2 \big(- \sin(\xi x)\big).$$

Nun sehen wir, dass $u_t = \Delta u$.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung ist linear und homogen, da wir sie durch Verschieben des Terms Δu nach links in die folgende Form bringen können:

$$\left(\begin{array}{l} \text{endliche Summe von Produkten der Form:} \\ \text{Funktion von } x \text{ mal } u \text{ oder (höhere) partielle Ableitung von } u \end{array} \right) = 0.$$

(Prüfen Sie das nach!) Da u^{ξ_1} und u^{ξ_2} die Wärmeleitungsgleichung lösen, gilt daher aufgrund des Superpositionsprinzips, dass die Summe $u := a_1 u^{\xi_1} + a_2 u^{\xi_2}$ diese Gleichung ebenfalls löst. (Überprüfen Sie das auch noch direkt, indem Sie die Funktion u in die Wärmeleitungsgleichung einsetzen und verwenden, das u^{ξ_i} diese Gleichung löst!)

(iii) Nein. Grund: Die Funktion

$$u(x) := -\frac{1}{x_1}$$

löst die PDG

$$u_{x_1} = u^2. \tag{9}$$

(Rechnen Sie das nach!) Für $a \in \mathbb{R}$ löst au die PDG (9) nur in den Fällen $a = 0$ und $a = 1$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (au)^2 &= a^2 u^2 \\ &= a^2 u_{x_1} \qquad \text{(da } u \text{ die PDG (9) löst)} \\ &= a(au)_{x_1}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich $(au)_{x_1}$, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist. Das bedeutet, dass au die PDG (9) nur in diesen zwei Fällen löst. Daher gilt das Superpositionsprinzip für die PDG (9) nicht.

Bemerkungen:

- Das Superpositionsprinzip gilt für lineare Differentialgleichungen.
- Die PDG (9) ist nichtlinear.

2.3. Positive Definitheit einer quadratischen Matrix.

(i) Die Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det\big(\lambda \mathbb{1} - A\big) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1) \cdot (-1) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind gemäss der Lösungsformel für eine quadratische Gleichung gegeben durch

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = 3 \text{ und } 1.$$

Das sind also die Eigenwerte der Matrix A.

(ii) Wie in der Vorlesung erwähnt, ist eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte (strikt) positiv sind. Da die Eigenwerte gemäss Teilaufgabe 2.3(i) durch die positiven Zahlen 3 und 1 gegeben sind, ist die Matrix A positiv definit.

(iii) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det\big(\lambda \mathbb{1} - A\big) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &= \big((\lambda - 2)(\lambda - 2) - (-1) \cdot (-1)\big)(\lambda - 2) \\ &= \big(\lambda^2 - 4\lambda + 3\big)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda = 2$. Die anderen Nullstellen sind gemäss 2.3(i) die Zahlen $\lambda = 3$ und 1.

(iv) Da die Eigenwerte gemäss 2.3(iii) durch die positiven Zahlen $1, 2, 3$ gegeben sind, ist die Matrix A positiv definit.

(v) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\big(\lambda \mathbb{1} - A\big) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - (-1)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind durch $1, 1, -1$ gegeben. Das sind also die Eigenwerte von A. Da -1 negativ ist, sind diese Eigenwerte nicht alle positiv. Daher ist A nicht positiv definit.

Bemerkung: Die Matrix A ist diagonal. Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind genau die diagonalen Einträge der Matrix. Wir brauchen also das charakteristische Polynom im diagonalen Fall gar nicht auszurechnen, sondern können dann die Eigenwerte einfach an der Diagonale ablesen. Im obigen Fall sind die diagonalen Einträge die Zahlen $1, 1, -1$. Das stimmt mit der obigen Berechnung der Eigenwerte überein.

Bemerkung: Wir können auch direkt mit der Definition sehen, dass die obige Matrix A nicht positiv definit ist. Für den Vektor $v := (0, 0, 1)$ gilt nämlich

$$v^T A v = v^T \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1 < 0.$$

Daher gilt nicht für alle Vektoren $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$, dass $v^T A v > 0$.

2.4. Elliptische, hyperbolische, parabolische Differentialgleichungen.

(i) In den drei folgenden Teilaufgaben geht es um die Eigenschaft *elliptisch*. Wir wiederholen aus der Vorlesung, wie diese Eigenschaft definiert ist. Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst *elliptisch* g. d. w. sie durch Verschieben von Termen in die Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f \tag{10}$$

gebracht werden kann, und dabei für jeden Punkt $x \in U$ die Matrix $\big(a_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{n}$ symmetrisch und positiv definit ist.

(a) Wir können die PDG durch Verschieben von Termen in die Form

$$u_{x_1x_1} + \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + \frac{1}{2}u_{x_2x_1} + u_{x_2x_2} = 0$$

bringen, also in die Form (10), wobei die Matrix $A := \big(a_{ij}(x)\big)_{ij}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. (Wir verwenden hierbei, dass $u_{x_1x_2} = u_{x_2x_1}$, da wir zweite partielle Ableitungen vertauschen dürfen.) Die Matrix A ist symmetrisch. Aus Aufgabe 2.3(ii) folgt, dass sie positiv definit ist. (Warum?) Daraus folgt, dass die gegebene PDG elliptisch ist.

Bemerkung: Alternativ können wir diese Teilaufgabe lösen, indem wir eine Proposition aus der Vorlesung verwenden, die Elliptizität im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$ charakterisiert. Diese Methode werden wir in der Teilaufgabe **??**(ii) verwenden.

(b) Wir können die PDG durch Verschieben von Termen in die Form

$$u_{x_1x_1} + \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + \frac{1}{2}u_{x_2x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0$$

bringen, also in die Form (10), wobei die Matrix $A := \big(a_{ij}(x)\big)_{ij}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Diese Matrix ist symmetrisch. Aus Aufgabe 2.3(iv) folgt, dass sie positiv definit ist. (Warum?) Daraus folgt, dass die gegebene PDG elliptisch ist.

In den zwei folgenden Teilaufgaben geht es um die Eigenschaften *hyperbolisch* und *parabolisch*. Wir wiederholen aus der Vorlesung, wie diese Eigenschaften definiert sind. Wir betrachten eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^{n+1}$ als $t, x_1, \ldots, x_n$. Seien

$$a_{ij}, b_i, c, f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

stetige Funktionen. Wir definieren den Operator L durch

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu. \tag{11}$$

Wir betrachten die partiellen Differentialgleichungen

$$u_{tt} + Lu = f, \tag{12}$$
$$u_t + Lu = f. \tag{13}$$

Eine lineare PDG zweiter Ordnung heisst *hyperbolisch* (respektive *parabolisch*) g. d. w. sie mittels Verschieben von Termen und einer lokalen Koordinatentransformation in die Form (12) (respektive (13)) gebracht werden kann, wobei für jeden Punkt $(t, x) \in U$ die Matrix $\big(a_{ij}(t,x)\big)_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist. (Diese Matrix steckt gemäss (11) in Lu drin.)

(c) Wir können die PDG durch Verschieben von Termen in die Form

$$u_{tt} - \left(u_{x_1x_1} + \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + \frac{1}{2}u_{x_2x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0$$

bringen, also in die Form (12), wobei die Matrix $A := \big(a_{ij}(t,x)\big)_{ij}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da diese Matrix symmetrisch und gemäss Aufgabe 2.3(ii) positiv definit ist, folgern wir, dass die PDG hyperbolisch ist.

(d) Wir können die PDG durch Verschieben von Termen in die Form

$$u_t - \left(u_{x_1x_1} + \frac{1}{2}u_{x_1x_2} + \frac{1}{2}u_{x_2x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0$$

bringen, also in die Form (13), wobei die Matrix $A := \big(a_{ij}(t,x)\big)_{ij}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da diese Matrix symmetrisch und positiv definit ist, folgern wir, dass die PDG parabolisch ist.

(ii) **(a)** Durch Verschieben von Termen können wir die PDG in der Form

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2 \cdot a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} + b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + cu = f \tag{14}$$

schreiben, wobei

$$a_{11}(x) = \sin(x_1), \quad a_{12} \equiv 2, \quad a_{22} \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0, \quad b_2 \equiv -1, \quad c \equiv -7, \quad f \equiv 0.$$

Die Diskriminante der PDE ist daher

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ &= \sin^2(x_1) \cdot 1 - 2^2 \\ &\leq -3 \qquad (\text{da } |\sin(t)| \leq 1,\, \forall t \in \mathbb{R}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Gemäss einer Proposition aus der Vorlesung ist die gegebene PDG daher hyperbolisch.

(b) Durch Verschieben von Termen können wir die PDG in der Form (14) schreiben, wobei

$$a_{11}(x) \equiv 1, \quad a_{12} \equiv -\frac{1}{2}, \quad a_{22}(x) = 1+x_2^2, \quad b_1 \equiv 0, \quad b_2 \equiv 0, \quad c(x) = -x_1, \quad f \equiv 0.$$

Die Diskriminante der PDE ist daher

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ &= 1 \cdot (1 + x_2^2) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\geq \frac{3}{4} \qquad (\text{da } x_2^2 \geq 0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Gemäss einer Proposition aus der Vorlesung ist daher die gegebene PDG elliptisch.

2.5. Variablentransformation für eine PDG auf $\mathbb{R}^2$.

(i) Wir nehmen an, dass $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die PDG

$$u_{x_1x_2} = 0 \tag{15}$$

löst. Wir folgen dem Tipp und integrieren die PDG zuerst nach x_2. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_{x_1}(x_1, x_2) &= u_{x_1}(x_1, 0) + \int_0^{x_2} u_{x_1x_2}(x_1, x_2')dx_2' \\ &= u_{x_1}(x_1, 0) + \int_0^{x_2} 0\, dx_2' \\ &= u_{x_1}(x_1, 0) \\ &=: f(x_1). \end{aligned}$$

Wir integrieren diese Gleichung nach x_1 und erhalten

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(0, x_2) + \int_0^{x_1} u_{x_1}(x_1', x_2) dx_1' \\ &= u(0, x_2) + \int_0^{x_1} f(x_1') dx_1' \\ &= G(x_2) + F(x_1), \end{aligned} \tag{16}$$

wobei

$$F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(t) := \int_0^{x_1} f(t) dt, \qquad G(t) := u(0, t).$$

Jede Lösung der PDG (15) hat also die Form (16).

Umgekehrt löst für jedes Paar von Funktionen $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad u(x_1, x_2) := F(x_1) + G(x_2) \tag{17}$$

die PDG (15). Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dx_2} \frac{d}{dx_1} \big(F(x_1) + G(x_2)\big) = \frac{d}{dx_2} \big(F'(x_1) + 0\big) = 0.$$

(ii) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung von

$$u_{x_1 x_2} = 0.$$

Wir definieren

$$v := u \circ \varphi^{-1}.$$

Wir schreiben

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2).$$

Wir folgen dem Tipp, setzen die Gleichheit $v \circ \varphi = u$ in (15) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= u_{x_1 x_2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2} \big(v_{y_i} \circ \varphi\big) \varphi^i_{x_1} \right)_{x_2} \qquad \text{(wegen } v \circ \varphi = u \text{ und der Kettenregel)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \big(v_{y_i y_j} \circ \varphi\big) \varphi^j_{x_2} \varphi^i_{x_1} + \sum_{i=1}^{2} \big(v_{y_i} \circ \varphi\big) \varphi^i_{x_1 x_2} \end{aligned} \tag{18}$$

(mittels der Kettenregel und der Produktregel = Leibnizregel).

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von φ. Wir haben

$$\varphi_{x_1}(x) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi_{x_2}(x) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi_{x_1x_2}(x) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Durch Einfüllen in (18) erhalten wir

$$0 = v_{y_1y_1} - v_{y_1y_2} + v_{y_2y_1} - v_{y_2y_2}.$$

Wegen des Satzes von Schwarz gilt $v_{y_1y_2} = v_{y_2y_1}$. Wir erhalten daher

$$v_{y_1y_1} = v_{y_2y_2}. \tag{19}$$

Indem wir dieses Argument rückwärts durchlaufen, folgt umgekehrt, dass für jede Lösung von (19) die Funktion $u := v \circ \varphi$ die PDG $u_{x_1x_2} = 0$ löst. (Überprüfen Sie das!)

Bemerkung: Der Ausdruck (18) kann wie folgt vereinfacht geschrieben werden. Wir definieren die *Hesse-Matrix* von v im Punkt y als

$$H_v(y) := \big(\partial_i\partial_j v(y)\big)_{i,j=1}^2 = \big(v_{y_jy_i}(y)\big)_{ij} = \begin{pmatrix} v_{y_1y_1}(y) & v_{y_2y_1}(y) \\ v_{y_1y_2}(y) & v_{y_2y_2}(y) \end{pmatrix}.$$

Das ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von v im Punkt y. Diese Matrix haben Sie in Analysis 2 kennengelernt. Der Ausdruck (18) ist gegeben durch

$$\varphi_{x_2}^T \big(H_v \circ \varphi\big)\varphi_{x_1} + \big((\nabla v)\circ\varphi\big)\cdot \varphi_{x_1x_2}.$$

(iii) Die gefundene PDG aus (19) ist die Wellengleichung mit Konstante $c = 1$. Sie ist hyperbolisch.

(iv) Die PDG $u_{x_1x_2} = 0$ kann geschrieben werden als

$$a_{11}u_{x_1x_1} + 2a_{12}u_{x_1x_2} + a_{22}u_{x_2x_2} = 0, \quad \text{wobei} \quad a_{11} = 0,\, a_{12} = \frac{1}{2},\, a_{22} = 0.$$

Die Diskriminante der PDG ist daher

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{1}{4} < 0.$$

Also ist die PDG $u_{x_1x_2} = 0$ nach einer Proposition aus der Vorlesung hyperbolisch.

Alternativer Beweis davon: Der Typ einer linearen PDG zweiter Ordnung[1] ist invariant unter jeder Koordinatentransformation, d. h., er bleibt gleich, wenn wir die Koordinaten transformieren. (Das folgt aus der Definition des Begriffs *Typ*.) Da die Wellengleichung hyperbolisch ist und die PDG $u_{x_1x_2} = 0$ durch eine Koordinatentransformation in die Wellengleichung überführt werden kann, ist die PDG $u_{x_1x_2} = 0$ also auch hyperbolisch.

(v) Seien $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ und u gegeben durch (17). Gemäss Teil (i) löst u die Gleichung $u_{x_1x_2} = 0$. Gemäss (ii) löst darum die Funktion

$$v := u \circ \varphi^{-1}$$

die Wellengleichung (19). Um v konkreter zu beschreiben, berechnen wir φ^{-1}: Es gilt

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und darum

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= u \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2) \\ &= F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + G\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Diese Funktion löst also die Wellengleichung (19).

Ein ähnliches Argument zeigt, dass jede Lösung der Wellengleichung (19) die Form (20) hat. (Überprüfen Sie das!)

[1] Mit dem *Typen* einer solchen PDG meinen wir Elliptizität, Hyperbolizität, Parabolizität oder *keinen Typ*. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, gibt es auch PDG die keinen dieser drei Typen haben.