3.1. Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Summenansatz für die Wärmeleitungsgleichung.

(i) Wir verwenden die Methode der Trennung der Variablen, indem wir den folgenden Summenansatz machen:

$$u(t,x) = T(t) + X(x). \tag{1}$$

Wir nehmen also an, dass diese Funktion die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ löst und bestimmen damit die Funktionen T und X. Wir erhalten

$$\dot{T}(t) = u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) = X''(x), \tag{2}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, also insbesondere

$$\dot{T}(t) = a := X''(0), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Durch Integrieren erhalten wir hieraus

$$T(t) = at + b, \qquad b := T(0). \tag{3}$$

Wir setzen das in (2) ein und erhalten für $x \in \mathbb{R}$

$$a = X''(x).$$

Durch Integrieren erhalten wir hieraus

$$X'(x) = ax + c, \qquad c := X'(0).$$

Durch nochmaliges Integrieren erhalten wir dann

$$X(x) = \frac{a}{2}x^2 + cx + d, \qquad d := X(0).$$

Indem wir das und (3) in den Ansatz (1) einsetzen, erhalten wir

$$u(t,x) = at + \frac{a}{2}x^2 + cx + c', \qquad c' := b + d. \tag{4}$$

(ii) Für alle $a, c, c' \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion aus (4) tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$. Durch Ableiten sehen wir nämlich, dass

$$u_t(t,x) = \dot{T}(t) = a = X''(x) = u_{xx}(t,x),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Wir nehmen an, dass die Funktion aus (4) auch die Anfangsbedingung erfüllt, das heisst

$$x^2 = u(t=0,x) = a \cdot 0 + \frac{a}{2}x^2 + cx + c',$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right) x^2 + cx + c' = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt, dass

$$\frac{a}{2} - 1 = 0, \text{ d. h. } a = 2, \qquad c = 0, \qquad c' = 0.$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$u(t,x) = 2t + x^2.$$

Diese Funktion erfüllt tatsächlich die Anfangsbedingung $u(t=0,x) = x^2$ (und die Wärmeleitungsgleichung).

3.2. Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Produktansatz für die Wellengleichung.

(i) Wir nehmen an, dass $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ löst. Wir betrachten zuerst den Fall $c = 1$. Wir verwenden die Methode der Trennung der Variablen, indem wir den folgenden Produktansatz machen:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{5}$$

Wir bestimmen die Funktionen T und X. Wir erhalten

$$\ddot{T}(t)X(x) = u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) = T(t)X''(x), \tag{6}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Fall $T \equiv 0$ oder $X \equiv 0$: Dann ist wegen (10) auch

$$u \equiv 0.$$

Um mehr Lösungen der Wellengleichung zu finden, nehmen wir also an, dass $T \not\equiv 0$ **und** $X \not\equiv 0$. Wir wählen ein $t_0 \in \mathbb{R}$, sodass $T(t_0) \neq 0$, und definieren

$$\lambda := \frac{\ddot{T}(t_0)}{T(t_0)}.$$

Aus (6) erhalten wir, dass

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung ob $\lambda = 0$ oder $\lambda \neq 0$.

Fall 1: $\lambda = 0$. Wir nehmen an, dass $\lambda = 0$. Aus (7) folgt, dass X die GDG

$$X''(x) = 0$$

erfüllt. Wir wissen aus Mathematik I, dass dann $X(x) = a_1 x + a_2$ für $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Des Weiteren erfüllt T die GDG

$$\ddot{T}(t) = 0.$$

Also $T(t) = b_1 t + b_2$ für $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Einsetzen in (10) ergibt

$$u(t,x) = (a_1 x + a_2)(b_1 t + b_2).$$

Rechnen Sie nach, dass dies tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist.

Fall 2: $\lambda \neq 0$. Das charakteristische Polynom der GDG (7) ist gegeben durch $p(y) = y^2 - \lambda$, welches die Nullstellen $y_1 = \sqrt{\lambda}$ und $y_2 = -\sqrt{\lambda}$ hat. Bemerkung: Hier kann λ eine allgemeine komplexe Zahl ungleich 0 sein. Die Wurzel $\sqrt{\lambda}$ ist komplex und nicht reell, ausser wenn λ eine positive reelle Zahl ist.

Wie Sie in Mathematik I gelernt haben, ist die allgemeine Lösung der GDG (7) durch

$$X(x) = a_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

gegeben, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Da $X \not\equiv 0$, gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $X(x_0) \neq 0$. Aus (6) folgt, dass

$$\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \frac{\ddot{T}(t_0)}{T(t_0)} = \lambda.$$

Indem wir (6) nochmals anwenden, erhalten wir

$$\ddot{T}(t) = \lambda\, T(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D.h., T erfüllt dieselbe GDG wie X. Analog zu oben folgern wir daher, dass

$$T(t) = b_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} + b_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t},$$

wobei $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Daraus schliessen wir

$$u(t,x) = \left(a_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(b_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} + b_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t}\right),$$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass dies tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung für $c = 1$ ist.

Allgemeines $c \in \mathbb{R}$: Eine Funktion u löst die Wellengleichung mit $c = 1$,

$$u_{tt} = u_{xx},$$

genau dann, wenn die Funktion

$$v(t,x) := u(ct,x)$$

die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

löst. (Rechnen Sie das nach!) Aus unserem obigen Argument folgt daher, dass die Produktlösungen der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ genau durch die Funktionen

$$u(t,x) = (a_1 x + a_2)(b_1 t + b_2), \tag{8}$$

und

$$u(t,x) = \left(a_1\, e^{\sqrt{\lambda} x} + a_2\, e^{-\sqrt{\lambda} x}\right) \left(b_1\, e^{\sqrt{\lambda}\, ct} + b_2\, e^{-\sqrt{\lambda}\, ct}\right) \tag{9}$$

gegeben sind, wobei $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \neq 0$.

(ii) Für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ erfüllt die Funktion aus (8) tatsächlich die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Durch Ableiten sehen wir nämlich, dass

$$u_{tt}(t,x) = 0 = u_{xx}(t,x),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Des Weiteren erfüllt für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \neq 0$ die Funktion aus (9) tatsächlich die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Durch Ableiten sehen wir nämlich, dass

$$u_{tt}(t,x) = c^2 \lambda \left(a_1\, e^{\sqrt{\lambda} x} + a_2\, e^{-\sqrt{\lambda} x}\right) \left(b_1\, e^{\sqrt{\lambda}\, ct} + b_2\, e^{-\sqrt{\lambda}\, ct}\right) = c^2 u_{xx}(t,x),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Wir folgen dem Hinweis und nehmen an, dass $\lambda < 0$. Wir führen die Notation

$$k := \sqrt{-\lambda} > 0$$

ein. Somit gilt

$$\sqrt{\lambda} = ki.$$

Wir schreiben

$$c_{++} := a_1 b_1, \qquad c_{+-} := a_1 b_2, \qquad c_{-+} := a_2 b_1, \qquad c_{--} := a_2 b_2.$$

Die Lösung (9) ist gegeben durch

$$u(t,x) = c_{++} e^{ik(x+ct)} + c_{+-} e^{ik(x-ct)} + c_{-+} e^{ik(-x+ct)} + c_{--} e^{ik(-x-ct)}. \tag{10}$$

Wir nehmen jetzt an, dass u die Anfangsbedingungen

$$u(t=0,x) = e^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$
$$u_t(t=0,x) = cie^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

löst. Aus (10) und der Dirichlet-Anfangsbedingung (11) folgt, dass $k = 1$ und

$$c_{++} + c_{+-} = 1, \qquad c_{-+} + c_{--} = 0. \tag{13}$$

Aus der Neumann-Anfangsbedingung (12) folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} ci\Big(\big(c_{++} - c_{+-}\big)e^{ix} + \big(c_{-+} - c_{--}\big)e^{-ix}\Big) &= u_t(0,x) \\ &= cie^{ix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$c_{++} - c_{+-} = 1, \qquad c_{-+} - c_{--} = 0.$$

Indem wir das mit (13) kombinieren, folgt, dass

$$c_{++} = 1, \qquad c_{+-} = 0, \qquad c_{-+} = 0, \qquad c_{--} = 0.$$

Indem wir das in (10) einsetzen, erhalten wir

$$u(t,x) = e^{i(x+ct)}, \qquad \forall t, x \in \mathbb{R}.$$

Rechnen Sie nach, dass dies tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit den Anfangsbedingungen (11,12) ist.

3.3. D'Alembertsche Formel für die Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension. Wir betrachten das Anfangswertproblems für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \\ u(0,x) &= u_0(x) := e^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= v_0(x) := cie^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nach der D'Alembertschen Formel ist die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy \\
&= \frac{e^{i(x+ct)}+e^{i(x-ct)}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} cie^{iy}dy \\
&= \frac{e^{i(x+ct)}+e^{i(x-ct)}}{2} + \frac{1}{2}e^{iy}\Big|_{y=x-ct}^{x+ct} \\
&= e^{i(x+ct)}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Lösung gleich ist wie die Lösung, welche wir in Aufgabe 3.2 (iii) gefunden haben.

3.4. Nochmals D'Alembert. Wir benützen die D'Alembertsche Formel mit der Notation aus der Vorlesung: Seien also $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u_0(x) := 0, \qquad v_0(x) := e^x.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblems für die Wellengleichung

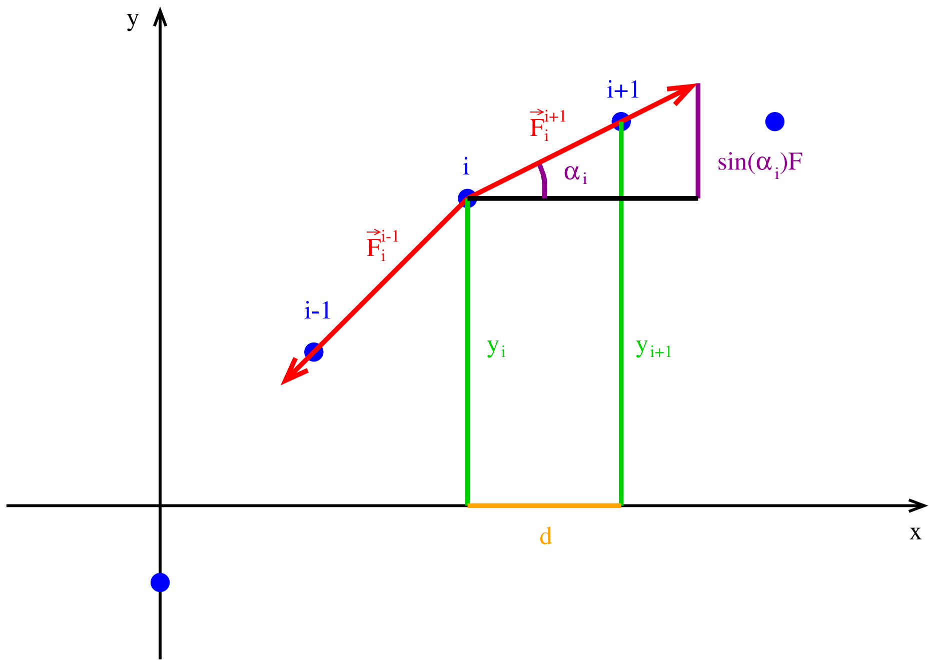
$$\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx}, \\
u(0,x) &= u_0(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\
u_t(0,x) &= v_0(x) = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nach der D'Alembertschen Formel mit $c = 1$ ist die Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dieses Problems gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)dy \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^y dy \\
&= \frac{1}{2}e^y\Big|_{x-t}^{x+t} \\
&= \frac{e^{x+t}-e^{x-t}}{2}.
\end{aligned}$$

3.5. Wellengleichung für eine schwingende Saite.

(a) Zeichnung der Saite als eine Kette von Punktteilchen (blau):



(b) Da die Kraft, welche das Teilchen $i+1$ auf das Teilchen i ausübt, zentral ist, zeigt der Vektor $\vec{F}_i^{i+1}$ in Richtung der Geraden durch den Ort von i und den Ort von $i+1$. Siehe die Abbildung in (a). Die Länge von $\vec{F}_i^{i+1}$ ist gleich der Spannkraft F. Gemäss der Zeichnung folgt daraus, dass

$$y\text{-Komponente von } \vec{F}_i^{i+1} \quad = \quad \sin(\alpha_i)F. \tag{14}$$

(c) Da wir die Saite nur wenig anregen, ist der Winkel α_i klein. Daher gilt

$$\sin(\alpha_i) \approx \tan(\alpha_i). \tag{15}$$

(d) Gemäss der Zeichnung gilt

$$\tan(\alpha_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{d}. \tag{16}$$

(e) Gemäss (14,15,16) haben wir

$$y\text{-Komponente von } \vec{F}_i^{i+1} = \frac{F}{d}(y_{i+1} - y_i).$$

Analog haben wir

$$y\text{-Komponente von } \vec{F}_i^{i-1} = \frac{F}{d}(y_{i-1} - y_i).$$

Die y-Komponente der total auf i wirkende Kraft ist daher

$$F_i^y = \frac{F}{d}\big(y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})\big). \tag{17}$$

(f) Wir fassen die seitliche Teilchenauslenkung jetzt als eine Funktion von x (und der Zeit) auf. Wir schreiben dafür

$$y(t, x).$$

Wir haben

$$y(t, id) = y_i(t).$$

Gemäss der Definition der Ableitung können wir nähern:

$$y_x\big(t, x = id\big) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{d},$$
$$y_{xx}(t, id) \approx \frac{y_x(t, id) - y_x\big(t, (i-1)d\big)}{d} \approx \frac{y_{i+1} - y_i - \big(y_i - y_{i-1}\big)}{d^2} \tag{18}$$

(g) Wir schreiben

$m :=$ Masse eines Punktteilchens

Wir haben

$$\begin{aligned} my_{tt}\big(t, x = id\big) &= m\ddot{y}_i \\ &= F_i^y \qquad \text{(wegen des zweiten Gesetzes von Newton)} \\ &\approx F d y_{xx}(t, id) \qquad \text{(wegen (17,18))}. \end{aligned}$$

(h) Im Limes $d \to 0$ [1] erhalten wir aus dem letzten Schritt

$$y_{tt}(t, x) = c^2 y_{xx}(t, x), \qquad \forall t, x \in \mathbb{R},$$
$$c := \sqrt{\frac{Fd}{m}}. \tag{19}$$

Die y-Auslenkung der Teilchen aus der Gleichgewichtslage, erfüllt also die Wellengleichung.

[1] Wir lassen hier gleichzeitig d gegen 0 und i so gegen unendlich gehen, dass $x = id$ konstant bleibt.

(i) Die lineare Massendichte ist gegeben durch

$$\mu = \frac{m}{d}.$$

Indem wir das in (19) einfüllen, erhalten wir

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \tag{20}$$

wie behauptet.

(j) Die Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c impliziert, dass diese Geschwindigkeit umso grösser ist, je stärker die Saite gespannt ist. Da c bei fester Wellenlänge proportional zur Frequenz ist, entspricht das der Erfahrung, dass eine Saite umso höher klingt, je stärker sie gespannt ist.

Die Formel impliziert auch, dass c umso kleiner ist, je grösser die lineare Massendichte der Saite ist. Das ist der Grund dafür, dass bei gewissen Instrumenten (zum Beispiel beim Klavier) für tiefe Töne dicke Saiten verwendet werden.

Bemerkungen:

- In dieser Herleitung haben wir angenommen, dass die Spannkraft der Saite zeitlich und räumlich konstant ist. Das ist sinnvoll für eine transversale Schwingung, da die Änderung der Spannkraft für kleine Auslenkungen proportional zur Änderung der Saitenlänge ist, welche sich ungefähr quadratisch zur maximalen Steigung der Saitenkurve verhält. In unserer Näherung vernachlässigen wir diesen quadratischen Term.

- Eine Saite kann auch longitudinal schwingen. Diese Schwingung wird durch eine longitudinale Druckwelle beschrieben, analog zu einer Druckwelle in einem Kristallgitter, für welche wir in der Vorlesung die Wellengleichung hergeleitet haben.

- In der obigen Herleitung der Wellengleichung für eine gespannte Saite modellieren wir die Saite durch eine Kette von Punktteilchen. Ein realistischeres Modell besteht darin, die Saite durch eine Kurve zu modellieren, die eine konstante Massendichte aufweist. Dieses Modell wird in Abschnitt 3.1 auf Seite 84 im folgenden Buch beschrieben:

  R. Choksi, *Partial differential equations. A first course*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2022.

Bonusaufgabe: Wir schreiben

f := gewünschte Frequenz $= 440\text{Hz} = 440\text{s}^{-1}$ (Standard-Kammerton A)

L := Länge der Saite

Wir nehmen an, dass die Enden der Saite festgehalten werden. Die Schwingung der Saite entspricht dann einer stehenden Welle, d. h., einer Überlagerung einer nach Vorwärts- und einer Rückwärtswelle, die durch von der gleichen Kosinusfunktion des Orts herrühren. Eine solche stehende Welle haben wir in der Vorlesung als ein Beispiel für den Satz über die allgemeine Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung gesehen. Sie wird durch die Funktion

$$y(t,x) = \sin\left(\pi\frac{ct}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$$

beschrieben. Diese Funktion entspricht dem Grundton, bei dem die Welle genau an den Enden Knoten aufweist. Im Vergleich mit dem Beispiel in der Vorlesung haben wir die Argumente der beiden Sinusfunktionen mit $\frac{\pi}{L}$ reskaliert. Dadurch haben wir erreicht, dass $y(t, x = 0) = 0 = y(t, x = L)$, wie gewünscht. Die Funktion löst noch stets die Wellengleichung mit c. Siehe Abbildung 1.

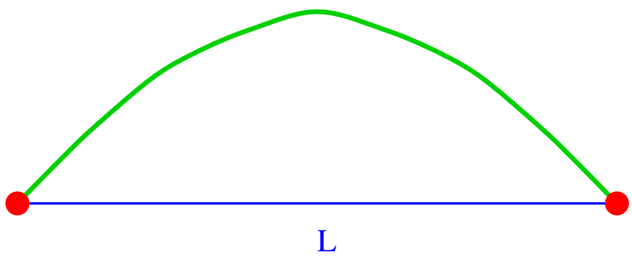


Abbildung 1: Die stehende Welle.

Die Frequenz der Schwingung ist gegeben durch

$$f = \frac{c}{\text{Wellenlänge}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

wobei wir die Formel (20) verwendet haben. Daraus ergibt sich

$$F = 4L^2 f^2 \mu. \tag{21}$$

Realistische Werte für L und μ für die Saite eines Flügels (Klavier), die den Kammerton A, also ein eingestrichenes a, erzeugt, sind gegeben durch

$$L = 0.4\text{m}, \qquad \mu = 5.6 \cdot 10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^{-1},$$

siehe Table 1 auf Seite 980 im Artikel

A. Stulov, *Physical modelling of the piano string scale*, Applied Acoustics 69 (2008) 977–984.

Durch Einsetzen in (21) ergibt sich

$$F = 4 \cdot 0.4^2 \cdot 440^2 \cdot 5.6 \cdot 10^{-3}\mathrm{N} \approx 690\mathrm{N}.$$

(Wieviel Masse brauchen Sie, um das auf die Waage zu bringen?)