4.1. Allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension. Haben Sie nachgerechnet, dass u die Wellengleichung löst? Falls Sie damit Probleme haben, schauen Sie sich dann den Beweis des Satzes in den Vorlesungsnotizen an.

4.2. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet.

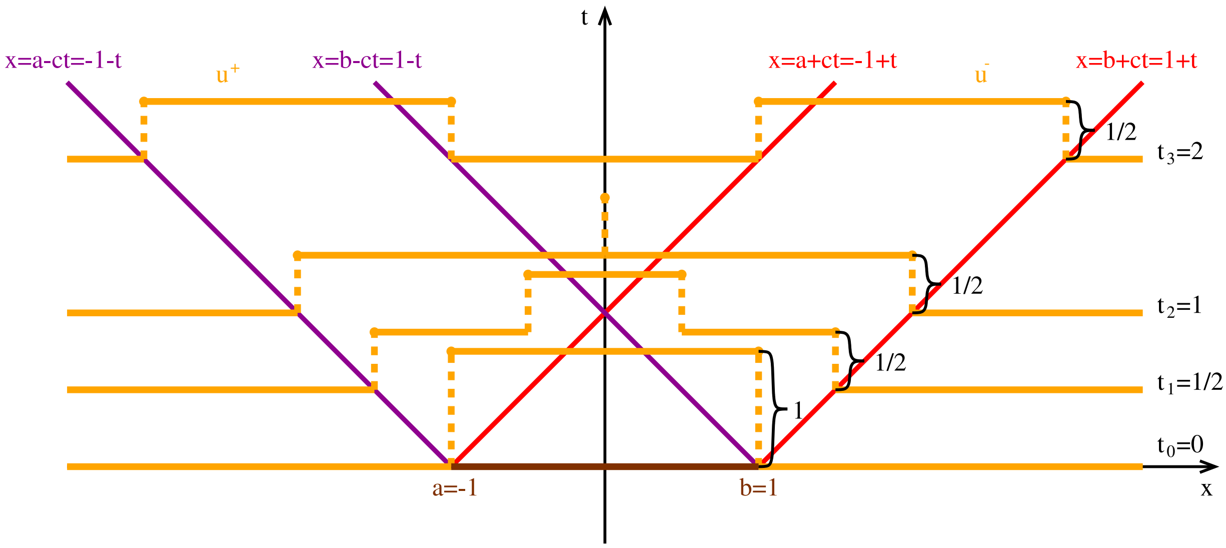
(i) Seien $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u_0(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}, \qquad v_0(x) := 0.$$

Gemäss der D'Alembertschen Formel mit $c = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)dy \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \Big(-1-t \le x \le 1-t \text{ oder } -1+t \le x \le 1+t\Big), \ t > 1, \\ \frac{1}{2}, & \Big(-1-t \le x < -1+t \text{ oder } 1-t < x \le 1+t\Big), \ 0 < t \le 1, \\ 1, & -1+t \le x \le 1-t, \ 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Lösung zu den Zeiten t_i, $i = 0, \dots, 3$:



(iii) Punkt $(t,x) = (1,0)$**:**

- Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass das Abhängigkeitsgebiet des Punktes $(t,x) = (1,0)$ durch das Intervall
$$\big[x - ct, x + ct\big] = [-1, 1]$$
gegeben ist, welches in Abbildung 1 grün eingezeichnet ist.

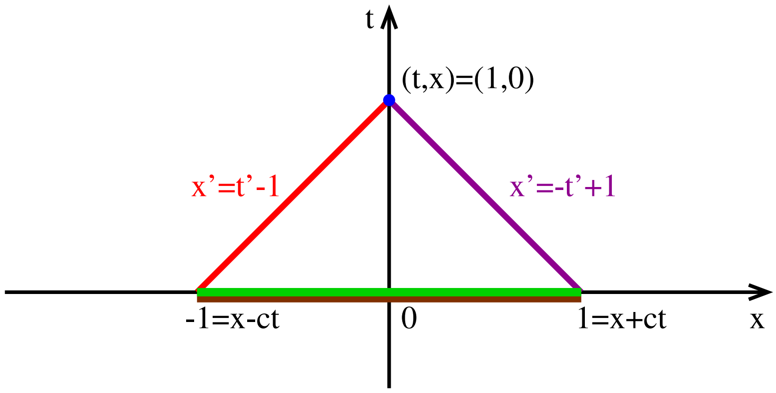


Abbildung 1: Grün: Abhängigkeitsgebiet des blauen Punktes $(t,x) = (1,0)$.

- Der Schnitt des Abhängigkeitsgebiets $[-1,1]$ mit dem Intervall $[a,b] = [-1,1]$ ist das Intervall $[-1,1]$. (Das Intervall $[a,b] = [-1,1]$ ist in Abbildung 1 braun eingezeichnet.)
- Der Schnitt ist nicht leer.
- Die Lösung u der räumlich eindimensionalen Wellengleichung hängt im Punkt (t,x) genau dann von den Anfangsdaten auf dem Interval $[a,b]$ ab, wenn der Schnitt des Abhängigkeitsgebiets von (t,x) mit dem Interval $[a,b]$ nicht leer ist. In unserem Fall ist dieser Schnitt nicht leer. Also hängt u im Punkt $(t,x) = (1,0)$ von den Anfangsdaten auf dem Intervall $[-1,1]$ ab.

Bemerkung: Geometrische Interpretation des Abhängigkeitsgebiets: Das Abhängigkeitsgebiet des Punktes (t,x) besteht aus allen Punkten x_0, sodass $u(t,x)$ vom Wert der Anfangsbedingung u_0 oder der Anfangsbedingung v_0 im Punkt x_0 abhängt. Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass dieses Gebiet durch die unteren Endpunkte der roten und der violetten Strecke eingegrenzt wird, wobei wie in Abbildung 1:

rote Strecke = Weg des blauen Punktes, wenn wir der Vorwärtswelle in negativer Zeitrichtung bis zum Zeitpunkt 0 folgen = Menge aller Punkte (t',x') der Form
$$(t',x'), \quad \text{wobei} \quad x' = x + c(t'-t) = 0 + 1\cdot(t'-1) = t'-1, \quad 0 \le t' \le t = 1.$$

violette Strecke = Weg des blauen Punktes, wenn wir der Rückwärtswelle in negativer Zeitrichtung bis zum Zeitpunkt 0 folgen = Menge aller Punkte der Form

$$(t', x'), \quad \text{wobei} \quad x' = x - c(t' - t) = 0 - 1 \cdot (t' - 1) = -t' + 1, \quad 0 \le t' \le t = 1.$$

Punkt $(t, x) = (1, 1)$**:**

- Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass das Abhängigkeitsgebiet des Punktes $(t, x) = (1, 1)$ durch das Intervall

$$\big[x - ct, x + ct\big] = [0, 2]$$

gegeben ist, welches in Abbildung 2 grün eingezeichnet ist.

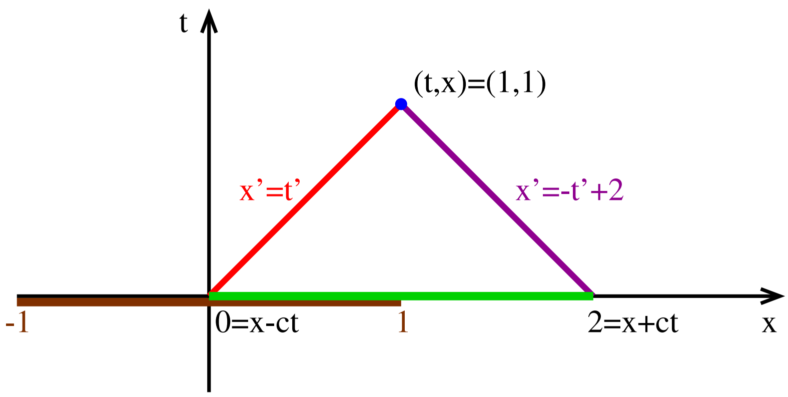


Abbildung 2: Grün: Abhängigkeitsgebiet des blauen Punktes $(t, x) = (1, 1)$.

- Der Schnitt des Abhängigkeitsgebiets $[0, 2]$ mit dem braunen Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ ist das Intervall $[0, 1]$.
- Der Schnitt ist nicht leer.
- Darum hängt u im Punkt $(t, x) = (1, 1)$ von den Anfangsdaten auf dem Intervall $[-1, 1]$ ab.

Punkt $(t, x) = (1, 3)$**:**

- Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass das Abhängigkeitsgebiet des Punktes $(t, x) = (1, 3)$ durch das Intervall

$$\big[x - ct, x + ct\big] = [2, 4]$$

gegeben ist, welches in Abbildung 3 grün eingezeichnet ist.

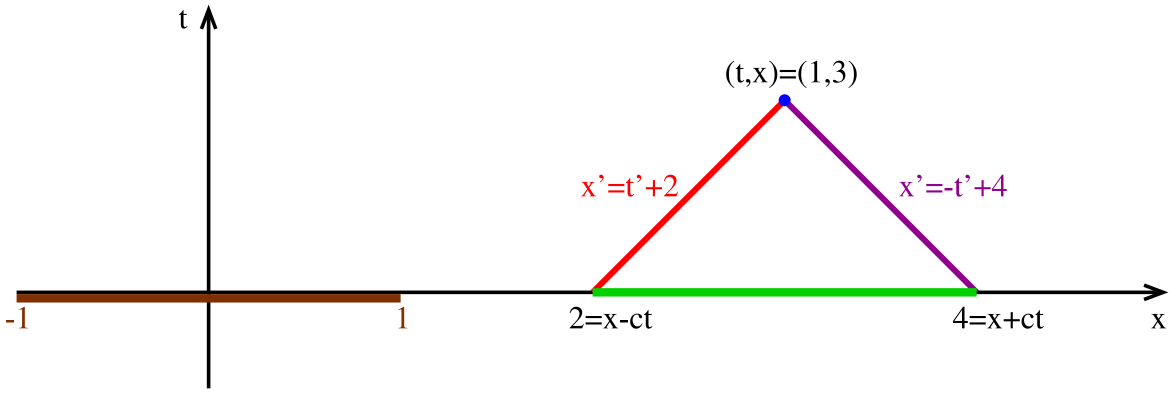


Abbildung 3: Grün: Abhängigkeitsgebiet des blauen Punktes $(t, x) = (1, 3)$.

- Der Schnitt des Abhängigkeitsgebiets $[2, 4]$ mit dem braunen Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ ist die leere Menge.
- Der Schnitt ist leer.
- Darum hängt u im Punkt $(t, x) = (1, 3)$ *nicht* von den Anfangsdaten auf dem Intervall $[-1, 1]$ ab.

(iv) $u(1, 3) = 0$, $u(2, 0) = 0$. Das folgt aus (i). Alternativ folgt $u(1, 3) = 0$ aus den Tatsachen, dass das Abhängigkeitsgebiets von $(1, 3)$ das Intervall $[2, 4]$ ist und dass die Anfangsdaten u_0 und v_0 auf diesem Intervall gleich 0 sind.

Des Weiteren folgt $u(2, 0) = 0$ alternativ aus der folgenden Tatsache, die in den Vorlesungsnotizen behandelt wird: Es gilt $u(t, x) = 0$ für jeden Punkt (t, x), sodass

$$t > t_x := \max\left\{\frac{x-a}{c}, \frac{b-x}{c}\right\},$$

falls u_0 und v_0 ausserhalb des Intervalls $[a, b]$ gleich 0 sind und $\int_a^b v_0(y)dy = 0$. In unserem Fall sind diese Bedingungen erfüllt mit $c = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $(t, x) = (2, 0)$. Insbesondere haben wir

$$t = 2 > 1 = \max\left\{\frac{0-(-1)}{1}, \frac{1-0}{1}\right\} = t_x.$$

(v) Einflussgebiet des Intervalls $[-1, 1]$:

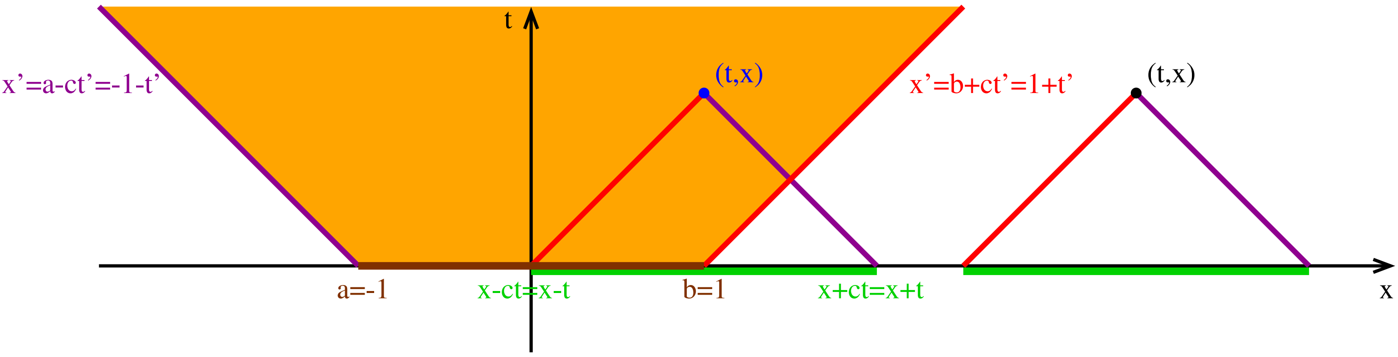


Abbildung 4: Das Einflussgebiet des braunen Intervalls $[a, b] = [-1, 1]$ ist gegeben durch das orange, sich nach oben unendlich ausdehnende Trapez. Der blaue Punkt (t, x) liegt in diesem Einflussgebiet. Sein grünes Abhängigkeitsgebiet schneidet das braune Intervall $[a, b]$. Der schwarze Punkt (t, x) liegt nicht im Einflussgebiet des braunen Intervalls $[a, b]$. Sein grünes Abhängigkeitsgebiet schneidet das braune Intervall $[a, b]$ nicht.

4.3. Inhomogene Wellengleichung, Prinzip von Duhamel.

(a) Haben Sie nochmals in Ihren Notizen nachgeschaut, was das Prinzip von Duhamel aussagt?

(b) Aus der Übungsserie 3 wissen wir, dass die Funktion

$$w(t, x) := \frac{e^{x+t} - e^{x-t}}{2}$$

die Wellengleichung $w_{tt} - w_{xx} = 0$ löst und die Anfangsbedingungen

$$w(0, x) = 0,$$
$$w_t(0, x) = e^x$$

erfüllt. Wir definieren nun

$$v(s, t, x) := w(t - s, x) = \frac{e^{x+t-s} - e^{x-t+s}}{2}$$

Wir sehen, dass

$$v_{tt}(s, t, x) - v_{xx}(s, t, x) = w_{tt}(t - s, x) - w_{xx}(t - s, x) = 0,$$
$$v(s, t = s, x) = w(0, x) = 0, \qquad v_t(s, t = s, x) = w_t(0, x) = e^x.$$

Die Funktion v löst also die Wellengleichung und die gewünschten Anfangsbedingungen.

(c) Die Voraussetzungen für das Duhamel-Prinzip sind mit $k := 2$ und $L := -\partial_x^2$ erfüllt. (Überprüfen Sie das!)

(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
u(t,x) &:= \int_0^t v(s,t,x)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t (e^{x+t-s} - e^{x-t+s})ds \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{x+t-s} - e^{x-t+s} \Big|_{s=0}^{s=t} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^x - e^x + e^{x+t} + e^{x-t} \right) \\
&= \frac{e^{x+t} + e^{x-t}}{2} - e^x.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Duhamel löst diese Funktion u die inhomogene Wellengleichung in einer räumlichen Dimension

$$u_{tt} - u_{xx} = e^x$$

und erfüllt die homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
u(t=0,x) &= 0, \\
u_t(t=0,x) &= 0.
\end{aligned}$$

(e) Durch Ableiten von u und Einsetzen können Sie dies selbst überprüfen.

4.4. Inhomogene Wärmeleitungsgleichung, Prinzip von Duhamel.

(i) Wir suchen eine Funktion $v(s,t,x)$ der Variablen $s \geq 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $s \geq 0$ die Funktion $v(s,\cdot,\cdot)$ die (homogene) Wärmeleitungsgleichung löst, das heisst

$$v_t(s,t,x) - v_{xx}(s,t,x) = 0$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Des Weiteren soll $v(s,\cdot,\cdot)$ die inhomogene Anfangsbedingung

$$v(s,t=s,x) = e^{s+x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

erfüllen. (Eine Voraussetzung für das Prinzip von Duhamel sind im Allgemeinen auch homogene Anfangsbedingungen für $v(s,\cdot,\cdot)$. Diese treten in unserem Fall jedoch nicht auf, da $k=1$ und daher $k-2<0$.) Wir sehen, dass die Funktion

$$v(s,t,x) := e^{t+x}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. (Überprüfen Sie das! Wir können diese Lösung der Wärmeleitungsgleichung zum Beispiel mittels der Methode der Trennung der Variablen finden.) Wegen des Prinzips von Duhamel löst daher die Funktion

$$u(t,x) := \int_0^t v(s,t,x)ds = \int_0^t e^{t+x}ds = te^{t+x}$$

die inhomogene Wärmeleitungsgleichung und erfüllt die homogene Anfangsbedingung, wie gewünscht. (Überprüfen Sie das!)

(ii) Wir suchen eine Lösung $w(t,x)$ der homogenen Wärmeleitungsgleichung $w_t - w_{xx} = 0$ mit der inhomogenen Anfangsbedingung $w(t=0,x) = \sin(x)$. Als Ansatz nehmen wir an, dass die Lösung w als Produkt der Variabeln t und x separabel ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dann

$$w(t,x) = e^{\lambda t}\left(C_+e^{\sqrt{\lambda}x} + C_-e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)$$

wobei $\lambda \in (0,\infty), C_\pm \in \mathbb{R}$ oder $\lambda \in (-\infty,0), C_\pm \in \mathbb{C}$, sodass $C_- = \overline{C_+}$. Einsetzen der Anfangsbedingung gibt

$$\left(C_+e^{\sqrt{\lambda}x} + C_-e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) = w(t=0,x) = \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Wir wählen also $\lambda = -1$ (sodass $\sqrt{\lambda} = i$), $C_+ = 1/2i$ und $C_- = -1/2i$. Wir erhalten

$$w(t,x) = e^{-t}\sin(x).$$

Sei nun $u(t,x) = te^{t+x}$ die Funktion aus der Teilaufgabe **(i)**. Wir definieren

$$v(t,x) = u(t,x) + w(t,x) = te^{t+x} + e^{-t}\sin(x).$$

Wir sehen, dass

$$v_t - v_{xx} = (u_t - u_{xx}) + (w_t - w_{xx}) = e^{t+x} + 0 = f(t,x)$$

und

$$v(t=0,x) = u(t=0,x) + w(t=0,x) = 0 + \sin(x) = \sin(x).$$

Die Funktion v erfüllt also die gewünschten Bedingungen.

4.5. Beweis des Prinzips von Duhamel. Haben Sie den Beweis des Prinzips von Duhamel gelesen?