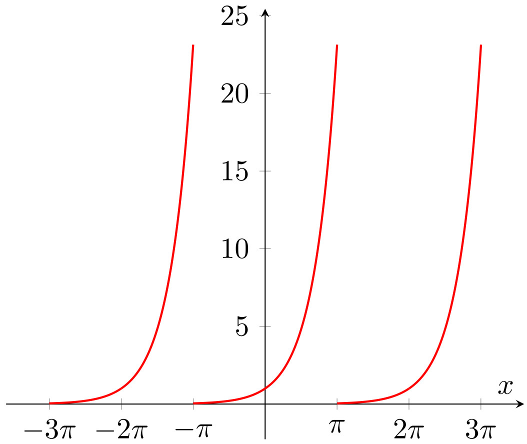
5.1. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der periodisierten Exponentialfunktion.

(i) Die Funktion f im Fall $P = 2\pi$ auf dem Intervall $\left[-\frac{3}{2}P, \frac{3}{2}P\right)$:



Die Funktion f ist 2π-periodisch. Daher haben wir

$$f(\pi) = f(-\pi) = e^{-\pi} \approx 0.043.$$

(ii) Wir betrachten das Intervall $[a, b] := \left[-\frac{P}{2}, \frac{3}{2}P\right]$. Wir definieren

$$m := 2, \qquad a_0 := a, \qquad a_1 := \tfrac{P}{2}, \qquad a_2 := b,$$
$$f_1 : [a_0, a_1] \to \mathbb{R},\ f_1(x) := e^x, \qquad f_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R},\ f_2(x) := e^{x-P}.$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind stetig, und wir haben $f = f_i$ auf dem offenen Intervall (a_{i-1}, a_i), für $i = 1, 2$. Daher ist die Einschränkung von f auf das Intervall $[a, b] = \left[-\frac{P}{2}, \frac{3}{2}P\right]$ stückweise stetig. Ein analoges Argument zeigt, dass die Einschränkung von f auf jedes Intervall $[a, b]$ stückweise stetig ist. Also ist f stückweise stetig.

(iii) Wir schreiben $\omega := \frac{2\pi}{P}$. Gemäss der Definition aus der Vorlesung ist der k-te

Fourierkoeffizienten von f gegeben durch

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_k &= \frac{1}{P}\int_0^P f(x)e^{-ik\omega x}dx \\
&= \frac{1}{P}\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} e^{(1-ik\omega)x}dx \qquad (\text{da } f(x)=\widetilde{f}(x)=e^x \text{ auf } \left[-\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right)) \\
&= \frac{1}{P(1-ik\omega)}e^{(1-ik\omega)x}\Big|_{x=-\frac{P}{2}}^{x=\frac{P}{2}} \\
&= \frac{1}{P-2\pi ik}\left(e^{\frac{P}{2}(1-ik\omega)} - e^{-\frac{P}{2}(1-ik\omega)}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{P-2\pi ik}\left(e^{\frac{P}{2}} - e^{-\frac{P}{2}}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$e^{-\frac{P}{2}ik\omega} = e^{-i\pi k} = (-1)^k = e^{i\pi k} = e^{\frac{P}{2}ik\omega}.$$

(iv) Ein ähnliches Argument wie in 5.1(ii) zeigt, dass f stückweise stetig differenzierbar ist. (Wir können geeignete *stetig differenzierbare* Funktionen $f_1,\dots,f_m$ finden.) Sei $x \in \left(-\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right)$ ein Punkt. Da $f=\widetilde{f}$ auf $\left[-\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right)$ und $\widetilde{f}$ stetig ist, ist f in x stetig. Nach einem Satz aus der Vorlesung (punktweise Fourierreihenentwicklung) konvergiert daher die Fourierreihe von f im Punkt x, also $\left(\sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x}\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$, gegen $f(x)$, d. h., die unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k e^{ik\omega x} := \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}_k e^{ik\omega x}$$

existiert, und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k e^{ik\omega x} = f(x).$$

Bemerkung: Ein analoges Argument zeigt, dass die Fourierreihe von f im Punkt x gegen $f(x)$ konvergiert, falls $x\in\mathbb{R}$ nicht die Form $x=\frac{P}{2}+jP$ mit $j\in\mathbb{Z}$ hat.

(v) Da f stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert gemäss einem Satz aus der Vorlesung (punktweise Fourierreihenentwicklung) ihre Fourierreihe im Punkt

$x = \frac{P}{2}$ gegen die Zahl $\frac{1}{2}\left(\lim_{y\uparrow\frac{P}{2}} f(y) + \lim_{y\downarrow\frac{P}{2}} f(y)\right)$, d. h.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{y\uparrow\frac{P}{2}} f(y) + \lim_{y\downarrow\frac{P}{2}} f(y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{y\uparrow\frac{P}{2}} e^{y} + \lim_{y\downarrow\frac{P}{2}} e^{y-P}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{P}{2}} + e^{-\frac{P}{2}}\right)\\ &=: y.\end{aligned}$$

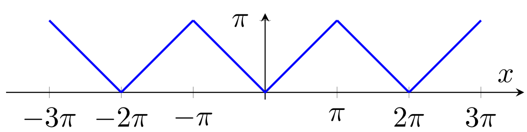
Es gilt jedoch

$$f\left(\frac{P}{2}\right) = \widetilde{f}\left(-\frac{P}{2}\right) = e^{-\frac{P}{2}} \neq y.$$

Daher konvergiert die Fourierreihe von f im Punkt $x = \frac{P}{2}$ nicht gegen $f\left(\frac{P}{2}\right)$. Dies ist keine Überaschung, da f bei $x = \frac{P}{2}$ nicht stetig ist.

5.2. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der Zickzackfunktion.

(i) Die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi)$:



Wir sehen, dass $f(-3\pi) = \widetilde{f}(-\pi) = |-\pi| = \pi \approx 3.14$.

(ii) Sei $j \in \mathbb{Z}$. Es ist klar, dass f im offenen Intervall $(-\pi + 2\pi j, \pi + 2\pi j)$ stetig ist. Wir überprüfen, ob f bei $x = -\pi + 2\pi j$ stetig ist. Gemäss Definition von f

haben wir

$$\begin{aligned}
f(-\pi+2\pi j) &= \widetilde{f}(-\pi)\\
&= |-\pi|\\
&= \pi,\\
\lim_{y\uparrow -\pi+2\pi j} f(y) &= \lim_{y\uparrow\pi}(\widetilde{f}(y) = |y|)\\
&= \pi,\\
\lim_{y\downarrow -\pi+2\pi j} f(y) &= \lim_{y\downarrow -\pi}(\widetilde{f}(y) = |y|)\\
&= |-\pi|\\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Also ist f bei $x=-\pi+2\pi j$ stetig. Daraus folgt, dass f (überall) stetig ist.

(iii) Wir bemerken, dass die Funktion f 2π-periodisch ist und berechnen die Fourierkoeffizienten von f mit der Definition aus der Vorlesung. Für $k=0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)=|x|)dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x\ dx + \int_0^{\pi} x\ dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Für $k\neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_k =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)=|x|)e^{-ikx}dx\\
=&\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x)e^{-ikx}dx + \int_0^{\pi} xe^{-ikx}dx\right)\\
=&\frac{1}{2\pi(-ik)}\left((-x)e^{-ikx}\Big|_{x=-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-ikx}dx + xe^{-ikx}\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} 1e^{-ikx}dx\right)\\
&\text{(mittels partieller Integration)}
\end{aligned}$$

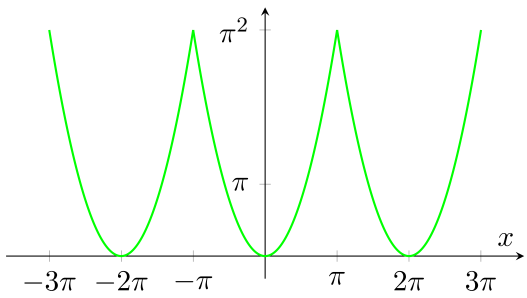
$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2\pi k}\left(0 - \pi e^{ik\pi} + \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=-\pi}^{0} + \pi e^{-ik\pi} - 0 - \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi k^2}\left(-1 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\pi k^2}\left(-1 + (-1)^k\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(iv) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{-k}$. Wie in der Vorlesung erklärt, folgt das auch direkt aus der Tatsache, dass die Funktion f gerade ist, d. h. $f(-x) = f(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(v) Ein ähnliches Argument wie in 5.1(ii) zeigt, dass f stückweise stetig differenzierbar ist. (Wir können geeignete *stetig differenzierbare* Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ finden.) Sei $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Da f bei x stetig ist, konvergiert daher nach einem Satz aus der Vorlesung (punktweise Fourierreihenentwicklung) die Fourierreihe von f im Punkt x gegen $f(x)$.

5.3. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung einer periodisierten quadratischen Funktion.

(i) Die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi)$:



Wir sehen, dass $f(2\pi) = 0$.

(ii) Dass f stetig ist, folgt aus einem der Teilaufgabe 5.2(ii) analogen Argument.

(iii) Wir bemerken, dass die Funktion f 2π-periodisch ist und berechnen den Fourierkoeffizienten von f mit der Definition aus der Vorlesung. Für $k = 0$ haben wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

und für $k \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}_k =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx}dx \\ =&\frac{1}{2\pi(-ik)}\left(\left[x^2 e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2xe^{-ikx}dx\right) \\ &\text{(mittels partieller Integration)} \\ =&0 + \left(\frac{1}{\pi k^2}\left[xe^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}dx\right) \\ &\text{(mittels partieller Integration)} \\ =&\frac{2(-1)^k}{k^2} + 0.\end{aligned}$$

(iv) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{-k}$. Wie in der Vorlesung erklärt, folgt das auch direkt aus der Tatsache, dass die Funktion f gerade ist, d. h. $f(-x) = f(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(v) Ein ähnliches Argument wie in 5.1(ii) zeigt, dass f stückweise stetig differenzierbar ist. (Wir können geeignete *stetig differenzierbare* Funktionen $f_1, \dots, f_m$ finden.) Sei $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Da f bei x stetig ist, konvergiert daher nach einem Satz aus der Vorlesung (punktweise Fourierreihenentwicklung) die Fourierreihe von f im Punkt x gegen $f(x)$.

(vi) Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N} \left(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k e^{ik0} - \widehat{f}_0 \right) \\
&\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \left(f(0) - \frac{\pi^2}{3} \right) {}^{1} \\
&= 0 - \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert, also die unendliche Summe, ist also gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5.4. Fourierkoeffizienten einer reellwertigen Funktion.

(i) Wir berechnen

$$\overline{\widehat{f}_{-k}} = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(x) e^{-ikx} dx = \widehat{\overline{f}}_k.$$

Es folgt $\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{\overline{f}}_k}$.

(ii) **(a)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}_k} &= \overline{\widehat{\overline{f}}_k} \qquad \text{(da } f \text{ reelle Werte annimmt)} \\
&= \widehat{f}_{-k} \qquad \text{(wegen (i))}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt an, dass f gerade ist. Gemäss Vorlesung gilt dann $\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k$. Indem wir das mit (1) kombinieren, erhalten wir $\overline{\widehat{f}_k} = \widehat{f}_k$. Daher ist $\widehat{f}_k$ reell.

(b) Wir nehmen an, dass f ungerade ist. Gemäss Vorlesung gilt dann $\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k$. Indem wir das mit (1) kombinieren, erhalten wir $\overline{\widehat{f}_k} = -\widehat{f}_k$. Daher ist $\widehat{f}_k$ imaginär.

[1] Die Notation $\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow}$ bedeutet, dass die linke Seite gegen die rechte Seite konvergiert, wenn N nach unendlich geht.

(iii) Wir überprüfen die Aussage der obigen Teilaufgabe anhand von Beispielen *reellwertiger* Funktionen aus der Vorlesung und den Übungen. Die Rechteckschwingung aus einem Beispiel aus der Vorlesung ist *ungerade* und hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -\frac{2i}{\pi k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten sind also *imaginär*. Die Sägezahnschwingung aus einem Beispiel aus der Vorlesung ist *ungerade* und hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{(-1)^k i}{k}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten sind also *imaginär*. Die periodische Fortsetzung des Absolutbetrags aus der Übungsserie 6 ist *gerade* und hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } 0 \neq k \text{ gerade ist,} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten sind also *reell*. Die periodische Fortsetzung der quadratischen Funktion aus der Übungsserie 6 ist *gerade* und hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{2(-1)^k}{k^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten sind also *reell*. Wir sehen, dass die Aussage der obigen Teilaufgabe für all diese Beispiele zutrifft.

Bemerkung: Die periodische Fortsetzung der Exponentialfunktion aus der Übungsserie 6 hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}_k = \frac{(-1)^k}{P - 2\pi i k}\left(e^{\frac{P}{2}} - e^{-\frac{P}{2}}\right).$$

Diese komplexe Zahlen sind weder reell noch imaginär. Da die Funktion weder gerade noch ungerade ist, ergibt sich kein Widerspruch zur obigen Teilaufgabe.

5.5. Lesen. Haben Sie die Abschnitte gelesen?