7.1. Fouriertransformation

(i) Wir berechnen die Fouriertransformierte von f an der Stelle $\xi = 0$

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\cdot 0x}\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx = 1$$

und an der Stelle $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i\xi} \\
&= \frac{\sin(\xi)}{\xi}.
\end{aligned}$$

(ii) Für $\xi = 0$ berechnen wir

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 1\ dx - \int_{0}^{1} 1\ dx = 0$$

und für $\xi \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} e^{-i\xi x}\ dx - \int_{0}^{1} e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \int_{0}^{1} e^{i\xi x}\ dx - \int_{0}^{1} e^{-i\xi x}\ dx \\
&= 2i\int_{0}^{1} \sin(\xi x)\ dx \\
&= -2i\frac{\cos(\xi x)}{\xi}\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= 2i\frac{-\cos(\xi) + 1}{\xi}.
\end{aligned}$$

(iii) Für $\xi = 0$ berechnen wir

$$\widehat{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\ dx + \int_{0}^{1} (1-x)\ dx = 1$$

und für $\xi \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}(1+x)e^{-i\xi x}\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \int_{0}^{1}(1-x)e^{i\xi x}\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{-i\xi x}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\xi x)\,dx \\
&= 2\left(\frac{(1-x)\sin(\xi x)}{\xi}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \int_{0}^{1}\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\xi^2}(-\cos(\xi)+1).
\end{aligned}$$

(iv) Die Einschränkung der Funktion F auf die Intervalle $(-\infty,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ und $[1,\infty)$ ist stetig differenzierbar. Daher ist F stückweise stetig differenzierbar. Wir berechnen die Ableitung

$$F'(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -1 < x < 0 \\ -1, & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{falls } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

(v) Es gilt $\widehat{f}(\xi) = i\xi\widehat{F}(\xi)$. Diese Beziehung kann man auch herleiten, ohne die Fouriertransformierten explizit zu berechnen. Da $f = F'$, haben wir nämlich

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{F'}(\xi) = i\xi\widehat{F}(\xi),$$

wobei wir einen Satz aus der Vorlesung angwendet haben.

(vi) Wir verwenden die Tatsache aus einem Satz aus der Vorlesung, dass $\frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi) = -i\widehat{(xg)}(\xi)$ um zu sehen, dass

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{g}(\xi) = (-i)^n\widehat{(x^n g)}(\xi).$$

Sei nun

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f(x) = x^n g(x)$ und also

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{(x^n g)}(\xi) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{g}(\xi).$$

Nun berechnen wir

$$\widehat{g}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-ix\xi}\ dx = \frac{1}{1+i\xi}.$$

Mit der obigen Formel erhalten wir

$$\widehat{f}(\xi) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{g}(\xi) = \frac{n!}{(1+i\xi)^{n+1}}.$$

7.2. Fouriertransformation.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|-i\xi x}\ dx = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{ax-i\xi x}\ dx + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax-i\xi x}}{a-i\xi}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{-ax-i\xi x}}{-a-i\xi}\bigg|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} \\
&= \frac{2a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

7.3. Eigenschaften der Fouriertransformation, Gaußsche Glockenfunktion.

(i) Wir berechnen

$$\mathcal{F}(cf) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)e^{-i\xi x}\ dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx = c\mathcal{F}(f)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f+g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)+g(x)\right)e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x}\ dx = \mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g).
\end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tau_v(f))(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_v(f)(x)e^{-i\xi x}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)e^{-i\xi x}\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+v)}\ dy = e^{-i\xi v}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\ dx = e^{-i\xi v}\mathcal{F}(f)(\xi),\end{aligned}$$

wobei wir den Variablenwechsel $y = x - v$ verwendet haben.

(iii)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta_a(f))(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(f)(x)e^{-i\xi x}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-i\xi x}\ dx \\ &= |a|\int_{-\infty}^{\infty} f\left(y\right) e^{-i\xi a y}\ dy = |a|\mathcal{F}(f)(a\xi),\end{aligned}$$

wobei wir den Variablenwechsel $y = \frac{x}{a}$ verwendet haben.

(iv) Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\widehat{f} = \sqrt{2\pi} f.$$

Sei nun $g_{\mu,\sigma}(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Dann gilt

$$g_{\mu,\sigma} = \tau_\mu(\delta_\sigma(f)).$$

Mithilfe der obigen Teilaufgaben gilt also

$$\mathcal{F}(g_{\mu,\sigma})(\xi) = \mathcal{F}(\tau_\mu(\delta_\sigma(f)))(\xi) = e^{-i\xi\mu}\mathcal{F}(\delta_\sigma(f))(\xi) = e^{-i\xi\mu}\sigma\widehat{f}(\sigma\xi) = \sqrt{2\pi}\,\sigma e^{-i\xi\mu}e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}.$$

Da $f_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\mu,\sigma}$, folgt wegen der Linearität der Fourier Transformation

$$\mathcal{F}(f_{\mu,\sigma})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathcal{F}(g_{\mu,\sigma}) = e^{-i\xi\mu}e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}.$$

7.4. Fouriertransformation und -rücktransformation. **(i):** Sei $c \in \mathbb{R}$.

Behauptung 1. *Es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)}{x} dx = \operatorname{sign}(c)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{1}$$

Beweis der Behauptung: Im **Fall** $c = 0$ sind beide Seiten gleich 0, da $\sin(0x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, und $\operatorname{sign}(0) = 0$. Wir betrachten den **Fall** $c \neq 0$. Sei $a \geq 0$. Mit Hilfe der Substitution $y = cx$ erhalten wir, dass $x = \frac{y}{c}$, $dx = \frac{dy}{c}$, und daher

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin(cx)}{x} dx = \int_{-ca}^{ca} \frac{\sin(y)}{y} dy. \tag{2}$$

Wir betrachten den **Fall** $c > 0$. Wir haben

$$-ca \to -\infty, \quad ca \to \infty \qquad \text{für } a \to \infty.$$

Indem wir den Grenzwert $a \to \infty$ nehmen, folgt darum aus (2), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Wegen $\operatorname{sign}(c) = 1$ gilt daher die Gleichheit (1).

Wir betrachten den **Fall** $c < 0$. Wir haben

$$\int_{-ca}^{ca} \frac{\sin(y)}{y} dy = -\int_{ca}^{-ca} \frac{\sin(y)}{y} dy,$$

$$ca \to -\infty, \quad -ca \to \infty \qquad \text{für } a \to \infty.$$

Indem wir den Grenzwert $a \to \infty$ nehmen, folgt darum aus (2), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)}{x} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Wegen $\operatorname{sign}(c) = -1$ gilt daher die Gleichheit (1). Diese Gleichheit gilt daher in allen Fällen. Das beweist die Behauptung. □

Der folgende Satz wurde in einem Tipp in der Aufgabenstellung erwähnt.

Satz 2 (Dirichlet-Integral)**.** *Es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Bemerkung. Die linke Seite heisst *Dirichlet-Integral.*

Es ist nicht Teil der Aufgabenstellung, diesen Satz zu beweisen. Der folgende Beweis richtet sich an den interessierten Leser/ die interessierte Leserin.

Beweis des Satzes: Sei $x > 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xy}dy &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-xy}dy \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-xy}}{-x}\bigg|_{y=0}^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-xb}-e^{-x\cdot 0}}{-x} \\ &= \frac{0+1}{x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sei jetzt $y > 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-xy}\sin x\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-xy}}{-y}\sin x\bigg|_{x=0}^b - \int_0^b \frac{e^{-xy}}{-y}\cos x\,dx\right) \text{ (mittels partieller Integration)} \\ &= 0-0+\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-xy}}{-y^2}\cos x\bigg|_{x=0}^b - \int_0^b \frac{e^{-xy}}{-y^2}(-\sin x)dx\right) \text{ (mittels partieller Integration)} \\ &= 0-\frac{e^{-0y}\cos 0}{-y^2}-\frac{I}{y^2}, \end{aligned}$$

$$\text{also } I\left(1+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}, \quad \text{also } I=\frac{1}{y^2+1}. \tag{4}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy} dy \right) \sin x \, dx \qquad \text{(wegen (3))} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy \, \text{(Mathematiker/innen haben das bewiesen.)} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{y^2+1} dy \qquad \text{(wegen (4))} \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{y^2+1} dy \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan y \Big|_{y=0}^b \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ gerade ist[1], folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Das beweist den Satz. $\square$

Aus Behauptung 1 und Satz 2 folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(cx)}{x} dx = \operatorname{sign}(c)\pi. \tag{5}$$

Sei ξ eine reelle Zahl ungleich ± 1. Die Funktion[2]

$$h(x) := \frac{\cos\big((1-\xi)x\big) - \cos\big((-1-\xi)x\big)}{x}$$

ist ungerade, d. h., $h(-x) = -h(x)$, $\forall x$. Daher haben wir $\int_{-a}^a h(x)dx = 0$ für jedes $a \geq 0$. Indem wir den Grenzwert $a \to \infty$ nehmen, folgt daraus, dass

$$\int_{-\infty}^\infty h(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a h(x)dx = 0. \tag{6}$$

Wegen der eulerschen Formel gilt

$$\sin(x) = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right). \tag{7}$$

[1] d. h., $f(-x) = f(x)$, $\forall x$

[2] Für $x = 0$ definieren wir die rechte Seite als 0.

Wir rechnen:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{f}(\xi)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-i\xi x} dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i}{2} \cdot \frac{e^{ix(1-\xi)} - e^{ix(-1-\xi)}}{x} dx \qquad \text{(wegen (7))}\\
&= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\big((1-\xi)x\big) - \cos\big((-1-\xi)x\big) + i\Big(\sin\big((1-\xi)x\big) - \sin\big((-1-\xi)x\big)\Big)}{x} dx\\
&\quad \text{(mit Hilfe der eulerschen Formel)}\\
&= 0 + \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\big((1-\xi)x\big)}{x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\big((1+\xi)x\big)}{x} dx\right)\\
&\quad \text{(wegen (6) und } \sin(-y) = -\sin(y))\\
&= \frac{\operatorname{sign}(1-\xi) + \operatorname{sign}(1+\xi)}{2}\pi \qquad \text{(wegen (5)).}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Wir definieren

$$
g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \qquad g(\xi) := \begin{cases} \pi, & \text{falls } |\xi| < 1,\\ 0, & \text{falls } |\xi| > 1. \end{cases} \tag{9}
$$

Wir haben

$$
\frac{\operatorname{sign}(1-\xi) + \operatorname{sign}(1+\xi)}{2}\pi = \begin{cases} \frac{1-1}{2}\pi = 0 = g(\xi), & \text{falls } \xi < -1,\\ \frac{1+1}{2}\pi = \pi = g(\xi), & \text{falls } -1 < \xi < 1,\\ \frac{-1+1}{2}\pi = 0 = g(\xi), & \text{falls } 1 < \xi. \end{cases}
$$

Indem wir das mit (8) kombinieren, erhalten wir

$$
\widehat{f}(\xi) = g(\xi), \qquad \forall \xi \neq \pm 1.
$$

(ii): Wir haben

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{f(x)} e^{i\xi x}} dx\\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx}\\
&= \overline{\widecheck{2\pi \overline{f}}}(\xi)\\
&= 2\pi \overline{\check{\overline{f}}}(\xi).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(iii): Wir definieren

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(\xi) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } -1 \le \xi \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäss Aufgabe 7.1(i) (Fouriertransformation) ist f die Fouriertransformierte von h, d. h.

$$f = \widehat{h}. \tag{11}$$

Sei $\xi \neq \pm 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= 2\pi \overline{\check{\overline{f}}}(\xi) && \text{(wegen (10))} \\
&= 2\pi \overline{\check{f}}(\xi) && \text{(weil } f \text{ reelle Werte annimmt)} \\
&= 2\pi \overline{\check{\widehat{h}}}(\xi) && \text{(gemäss (11))} \\
&= 2\pi \overline{h}(\xi) && \text{(gemäss dem Satz über die Fourierrücktransformation}^3\text{)} \qquad (12) \\
&= 2\pi h(\xi) && \text{(da } h \text{ reelle Werte annimmt)} \\
&= g(\xi),
\end{aligned}$$

wobei g wie in (9) definiert ist. Wir erhalten also das gleiche Resultat wie mit der direkten Rechnung. (Siehe Teil **(i)**.)

7.5. Anwendung der Fouriertransformation auf die Varianz der Gaußschen Glockenfunktion.

(i) Gemäss der Definition von $f_{\mu,\sigma}$ und von τ_v haben wir

$$(x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma} = \tau_\mu\big(x^2 f_{0,\sigma}\big).$$

Gemäss Aufgabe 7.3(ii) gilt daher

$$\mathcal{F}\left((x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}\right) = \mathcal{F}\left(\tau_\mu\big(x^2 f_{0,\sigma}\big)\right) = e^{-i\xi\mu}\mathcal{F}\big(x^2 f_{0,\sigma}\big).$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathcal{F}(xf) = i(\mathcal{F}(f))'$, also

$$\mathcal{F}(x^2 f_{0,\sigma}) = i(\mathcal{F}(x f_{0,\sigma}))' = -(\mathcal{F}(f_{0,\sigma}))''.$$

[3] Strikt genommen dürfen wir den Satz nicht anwenden, da die Voraussetzung, dass $\widehat{h} = f$ absolut integrierbar ist, in unserem Fall nicht erfüllt ist. ($f(x) = \frac{\sin x}{x}$) Die Fourierrücktransformierte $\check{\widehat{h}} = \check{f}$ ist jedoch an der Stelle ξ wohldefiniert, da $\xi \neq \pm 1$. Da h bei ξ stetig ist, gilt (12).

Mit Aufgabe 7.3(iv) und der Kettenregel folgt nun

$$(\mathcal{F}(f_{0,\sigma}))'(\xi) = \left(e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}(-\xi\sigma^2)$$

und somit mit der Kettenregel und der Produktregel

$$(\mathcal{F}(f_{\mu,\sigma}))''(\xi) = e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}\left(\left(-\xi\sigma^2\right)^2 - \sigma^2\right).$$

Wir folgern also, dass

$$\mathcal{F}\left((x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}\right)(\xi) = e^{-i\xi\mu}e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}\left(-\sigma^4\xi^2 + \sigma^2\right).$$

(ii) Gemäss obiger Formel haben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}(x)\, dx = \mathcal{F}\left((x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}\right)(0) = \sigma^2.$$

7.6. Faltung und Fouriertransformation. Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(f*g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)\mathrm{e}^{-i\xi x}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)dy \\
&\quad \text{(gemäss dem Satz von Fubini}^4\text{)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\,dx\right)g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{-i\xi z}\,dz\right)g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

[4] Für eine Version dieses Satzes siehe das Skript von L. Kobel-Keller, *Grundlagen der Mathematik (Analysis A und B) und Mathematik I, II und Mathematik III: PDE*, S. 508, Tatsache/Regel 12.2 (Satz von Fubini). Wir verwenden hier eine Variante des Satzes für uneigentliche Integrale. Dabei benützen wir unsere Annahme, dass f und g absolut integrierbar sind.

Bemerkungen: Aus den Annahmen, dass f beschränkt und g absolut integrierbar ist, folgt, dass $f * g$ wohldefiniert und stetig ist. Aus den Annahmen, dass f und g absolut integrierbar sind, folgt dass $f * g$ absolut integrierbar ist. Daher ist die Fouriertransformierte von $f * g$ wohldefiniert.[5]

7.7. Wärmeleitungsgleichung.

Wir benützen den Satz aus der Vorlesung über die Wärmeleitungsgleichung. Wir wiederholen, dass der Wärmeleitungskern durch

$$\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(t, x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

gegeben ist. Von diesem Satz wissen wir, dass

$$u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u(t, x) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x - y) u_0(y) dy, & \text{falls } t > 0 \\ u_0(x), & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(0, x) &= u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ist.

(a) Wir setzen ein mit $u_0(x) = e^x$ und berechnen für $t > 0$

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x - y) u_0(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + y} \, dy.$$

Wir haben

$$-\frac{(x - y)^2}{4t} + y = -\frac{1}{2} \left(\frac{y - (x + 2t)}{\sqrt{2t}} \right)^2 + t + x.$$

Bemerke nun, dass

$$f_{x+2t, \sqrt{2t}}(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - (x+2t)}{\sqrt{2t}} \right)^2},$$

wobei wir die Notation von Aufgabe 7.3 verwendet haben. Unter Verwendung von Aufgabe 7.3 sehen wir, dass

$$u(t, x) = e^{x+t} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x+2t, \sqrt{2t}}(y) \, dy = e^{x+t} \mathcal{F} \left(f_{x+2t, \sqrt{2t}} \right) (0) = e^{x+t}.$$

(Überprüfen Sie, dass diese Funktion das Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung löst!)

[5] Es ist nicht Teil der Aufgabenstellung, diese Aussagen zu zeigen.

(b) Wir gehen analog zur obigen Teilaufgabe vor. Wir setzen $u_0(x) = \cos(x)$ ein und berechnen für $t > 0$

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos(y)\ dy.$$

Unter der Verwendung der Formel $\cos(y) = (e^{iy} + e^{-iy})/2$ folgt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} (e^{iy} + e^{-iy})\ dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,\sqrt{2t}}(y)(e^{iy} + e^{-iy})\ dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}(f_{x,\sqrt{2t}})(-1) + \mathcal{F}(f_{x,\sqrt{2t}})(1)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{ix} e^{-t} + e^{-ix} e^{-t}\right] \\ &= e^{-t} \cos(x), \end{aligned}$$

wobei wir die Notation von Aufgabe 7.3 mit

$$f_{x,\sqrt{2t}}(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} \qquad \mathcal{F}(f_{x,\sqrt{2t}})(\xi) = e^{-i\xi x} e^{-\xi^2 t}$$

verwendet haben. (Überprüfen Sie, dass die Funktion u das Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung löst!)