8.1. Gewöhnliche Differentialgleichung und Fouriertransformation.

Wir berechnen die Fouriertransformation der Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = e^{-|x|}. \tag{1}$$

Es gilt $\widehat{u''}(\xi) = -\xi^2 \widehat{u}(\xi)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Wir erhalten durch Fouriertransformation von (1):

$$\left(\xi^2 + 1\right) \widehat{u} = \widehat{-u'' + u} = \frac{2}{1+\xi^2}, \quad \text{d. h.} \quad \widehat{u} = \frac{2}{(1+\xi^2)^2}. \tag{2}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\widehat{u'} &= i\xi\widehat{u} \qquad \text{(gemäss einem Satz aus der Vorlesung),} \\
&= \frac{2i\xi}{(1+\xi^2)^2} \qquad \text{(wegen (2))} \\
&= -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{i}{1+\xi^2}\right) \\
&= -\frac{i\widehat{f}\,'}{2} \\
&= -\frac{\widehat{xf}}{2} \qquad \text{(gemäss einem Satz aus der Vorlesung),}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
u' &= \check{\widehat{u'}} \qquad \text{(gemäss dem Satz über die Fourierrücktransformation)} \\
&= -\frac{\check{\widehat{xf}}}{2} \qquad \text{(wegen (3))} \\
&= -\frac{xf(x)}{2} \qquad \text{(gemäss dem Satz über die Fourierrücktransformation)} \\
&= -\frac{xe^{-|x|}}{2}.
\end{aligned}$$

Für $x \geq 0$ erhalten wir also mittels partieller Integration

$$u(x) = \frac{1}{2}\int \left(-e^{-x}\right) x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-x}x - \int e^{-x} \cdot 1 \, dx\right) = \frac{e^{-x}(x+1)}{2} + C_+. \tag{4}$$

Für $x \leq 0$ erhalten wir mittels partieller Integration analog

$$u(x) = \frac{e^{x}(-x+1)}{2} + C_-. \tag{5}$$

(Rechnen Sie das nach!) Damit wir für $x = 0$ den gleichen Wert erhalten, muss $C_+ = C_-$ gelten. Durch Einsetzen in die GDG (1) erhalten wir aus (4,5), dass $C_+ = 0$ und

$$u(x) = \frac{e^{-|x|}(|x|+1)}{2}.$$

(Überprüfen Sie, dass diese Funktion tatsächlich die GDG (1) löst!)

8.2. Lösung der Wellengleichung mit Hilfe der räumlichen Fouriertransformation Seien $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei u_0 zweimal stetig differenzierbar und v_0 stetig differenzierbar ist. Angenommen u löst die folgende PDG

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= v_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Um das Anfangswertproblem mithilfe der räumlichen Fouriertransformation zu lösen, betrachten wir die Fouriertransformierte der Funktion u in Bezug auf den Raum. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$u^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u^t(x) := u(t,x).$$

Die Fouriertransformation dieser Funktion ist gegeben durch

$$\widehat{u^t}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u^t(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Wir wenden die Fouriertransformation auf beide Seiten der Wellengleichung an

$$\mathcal{F}\{u^t_{tt}\} = \mathcal{F}\{u^t_{xx}\}.$$

Die Fouriertransformierte der zweiten Ableitung nach der Zeit $\mathcal{F}\{u^t_{tt}\}$ der zweiten Ableitung der Fouriertransformierten von u nach der Zeit entspricht, also

$$\mathcal{F}\{u^t_{tt}\} = \frac{d^2}{dt^2}\widehat{u^t}(\xi).$$

Von einem Satz aus der Vorlesung folgt, dass die Fouriertransformierte der zweiten Ableitung nach dem Raum $\mathcal{F}\{u^t_{xx}\}$ entspricht $-\xi^2$ mal der Fouriertransformierten von u, also

$$\mathcal{F}\{u^t_{xx}\} = -\xi^2 \widehat{u^t}(\xi).$$

Setzen wir dies in die ursprüngliche Gleichung ein:

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u^t}(\xi) = -\xi^2\widehat{u^t}(\xi).$$

Das ist eine gewöhnliche DG für die Funktion $t \mapsto \widehat{u^t}(\xi)$. Aus Analysis 2 wissen wir, dass die Lösung dieser GDG durch

$$\widehat{u^t}(\xi) = A(\xi)\cos(t\xi) + B(\xi)\sin(t\xi)$$

gegeben ist. Um $A(\xi)$ und $B(\xi)$ zu bestimmen, Fourier-transformieren wir die Anfangsbedingungen. Wir erhalten

$$\widehat{u_0}(\xi) = \widehat{u^0}(\xi) = A(\xi)$$

und

$$\widehat{v_0}(\xi) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\widehat{u^t}(\xi) = B(\xi)\xi,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\frac{d}{dt}\widehat{u^t}(\xi) = -A(\xi)\xi\sin(t\xi) + B(\xi)\xi\cos(t\xi)$ und $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. Nun rücktransformieren wir $\widehat{u^t}$ und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^t(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u_0}(\xi)\cos(\xi t)e^{i\xi x}d\xi}_{(3)} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{v_0}(\xi)\frac{\sin(\xi t)}{\xi}e^{i\xi x}d\xi}_{(4)}. \end{aligned}$$

Wir wiederholen die folgenden zwei Identitäten

$$\cos(\xi t) = \frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2}$$

und

$$\frac{\sin(\xi t)}{\xi} = \int_0^t \cos(\xi s)ds.$$

Also können wir berechnen

$$\begin{aligned} (3) &= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u_0}(\xi)e^{i\xi(x+t)}d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u_0}(\xi)e^{i\xi(x-t)}d\xi\right) \\ &= \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} \end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned}(4) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{v_0}(\xi) \frac{e^{i\xi(x+s)} + e^{i\xi(x-s)}}{2} d\xi \right) ds \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^t v_0(x+s)ds + \int_0^t v_0(x-s)ds \right] \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds.\end{aligned}$$

Es folgt nun

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds.$$

Das ist die d'Alembertsche Formel für die Lösung des Anfangswertproblems für die räumlich eindimensionale Wellengleichung mit $c = 1$. Wir rechnen nochmals nach, dass diese Formel tatsächlich das Anfangswertproblem löst: Mit der obigen Formel berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\big(u_0'(x+t) - u_0'(x-t)\big) + \frac{1}{2}v_0(x+t) + \frac{1}{2}v_0(x-t), \\ u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2}\big(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)\big) + \frac{1}{2}v_0'(x+t) - \frac{1}{2}v_0'(x-t), \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\big(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)\big) + \frac{1}{2}v_0'(x+t) - \frac{1}{2}v_0'(x-t).\end{aligned}$$

Nun können wir überprüfen, dass u tatsächlich die folgende PDG löst

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= v_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

8.3. elektrostatisches Potential, Poissongleichung

(i) Wie in Übungsserie 1 erwähnt, besagt eine der Maxwellgleichungen, das Faradaysche Induktionsgesetz, dass

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}.$$

Da wir annehmen, dass $\partial_t \mathbf{B} = 0$, gilt also $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, d. h. die Rotation von $\mathbf{E}$ verschwindet. Gemäss einem Satz aus Analysis 2 ist $\mathbf{E}$ daher konservativ, d. h. $\mathbf{E}$ besitzt ein Potential, d. h. es gibt eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

(ii) Eine der Maxwellgleichungen, das Gaußsche Gesetz für das elektrische Feld, besagt, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Da $\nabla \varphi = -\mathbf{E}$, folgt daraus, dass

$$\Delta \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

8.4. harmonische Funktionen: Fundamentallösung der Laplacegleichung, holomorphe Funktion.

(i) Wir betrachten den **Fall** $n = 2$ und die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \log \|x\| = \log \left(\left(\|x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \log \left(x_1^2 + x_2^2 \right).$$

Um $\Delta \varphi = \varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2}$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst mit Hilfe der Kettenregel die ersten partiellen Ableitungen von φ im Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{2\|x\|^2} 2x_1 = \frac{x_1}{\|x\|^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{1}{2\|x\|^2} 2x_2 = \frac{x_2}{\|x\|^2}.$$

Mit Hilfe der Leibnizregel (=Produktregel) und der Kettenregel erhalten wir daher für die zweiten partiellen Ableitungen von φ im Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(x) = \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2x_1^2}{\|x\|^4}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2x_2^2}{\|x\|^4}.$$

Wir addieren die zweiten partiellen Ableitungen und erhalten für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\Delta \varphi(x) = \frac{2}{\|x\|^2} - \frac{2\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{\|x\|^4} = \frac{2\|x\|^2 - 2\|x\|^2}{\|x\|^4} = 0,$$

wie behauptet.

Wir betrachten jetzt den **Fall** $n \geq 3$ und die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \|x\|^{2-n} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Um $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i x_i}$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst für $i = 1, \ldots, n$ mit Hilfe der Kettenregel die erste partielle Ableitung von φ nach x_i im Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{2-n}{2}}\right) \\
&= \frac{2-n}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{2-n}{2}-1} 2x_i \\
&= (2-n)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}} x_i.
\end{aligned}$$

Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x) &= (2-n)\left(\left(-\frac{n}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1} \cdot 2x_i x_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right) \\
&= (2-n)\left(-n\|x\|^{-n-2} x_i^2 + \|x\|^{-n}\right).
\end{aligned}$$

Wir addieren die zweiten partiellen Ableitungen und erhalten

$$\Delta\varphi(x) = (2-n)\left(-n\|x\|^{-n-2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) + n\|x\|^{-n}\right) = 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$.

(ii) Wir betrachten eine holomorphe zweimal stetig partiell differentierbare Funktion $u : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Wir schreiben $f := \mathrm{Re}(u)$ für den Realteil von u und $g := \mathrm{Im}(u)$ für den Imaginärteil von u. Wir haben also

$$u = f + ig.$$

Gemäss Annahme erfüllt u die Cauchy-Riemann-Gleichung. Diese ist gegeben durch:

$$f_y + ig_y = u_y = iu_x = if_x + iig_x = if_x - g_x,$$

d. h., durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{7}$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion f harmonisch ist, d. h., dass $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$. Dazu differenzieren wir die Gleichung (6) nach x und die Gleichung (7) nach y. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

Indem wir diese beiden Gleichungen addieren, erhalten wir

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0,$$

wobei wir im zweiten Schritt den Satz von Schwarz verwendet haben. Dieser besagt, dass wir die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen dürfen. Die Funktion f ist also harmonisch.

Wir zeigen nun, dass die Funktion g harmonisch ist, d. h., dass $\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0$. Dazu differenzieren wir die Gleichung (6) nach y und die Gleichung (7) nach x. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Indem wir diese beiden Gleichungen addieren, erhalten wir

$$\Delta g = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

wobei wir im zweiten Schritt den Satz von Schwarz verwendet haben. Die Funktion g ist also harmonisch. Wir haben also gezeigt, dass

$$\Delta u = \Delta f + i \Delta g = 0,$$

d. h., dass u harmonisch ist.

8.5. Laplacegleichung auf dem Quadrat. Um die Lösung $u : U \to \mathbb{R}$ des gegebenen Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung zu finden, nehmen wir an, dass diese Lösung wie folgt als Produkt geschrieben werden kann:

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \qquad \forall x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]. \tag{8}$$

Wir substituieren wir dies in die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ und erhalten

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0, \qquad \forall x \in [0,1],\, y \in [0,1]. \tag{9}$$

Fall $X \equiv 0$ **oder** $Y \equiv 0$**:** Dann ist wegen (8) auch

$$u \equiv 0. \tag{10}$$

Fall $X \not\equiv 0$ **und** $Y \not\equiv 0$**:** Wir wählen einen Punkt $y_0 \in [0,1]$, sodass $Y(y_0) \neq 0$, und definieren

$$\lambda := -\frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)}. \tag{11}$$

Indem wir $y := y_0$ setzen und (9) durch $Y(y_0)$ teilen, erhalten wir

$$X''(x) = \lambda X(x). \tag{12}$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für X.

Fall $\lambda \neq 0$**:** Wie Sie in Mathematik I gelernt haben, ist in diesem Fall die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$X(x) = C_+ e^{\sqrt{\lambda}x} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}x}, \tag{13}$$

wobei $C_\pm$ Konstanten sind. Aus (8) und der Randbedingung $u(x=0,y) = g(0,y) = 0$ folgt, dass $X(0)Y(y) = u(0,y) = 0$, für alle $y \in [0,1]$. Weil $Y \not\equiv 0$, folgt daraus, dass

$$0 = X(0) = C_+ e^0 + C_- e^0 = C_+ + C_-,$$

also, dass

$$C_- = -C_+. \tag{14}$$

Aus (8) und der Randbedingung $u(x=1,y) = g(1,y) = 0$ folgt, dass $X(1)Y(y) = u(1,y) = 0$, also dass

$$0 = X(1) = C_+ e^{\sqrt{\lambda}} + C_- e^{-\sqrt{\lambda}} = C_+ \left(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}\right), \tag{15}$$

wobei wir im letzten Schritt (14) verwendet haben. Wegen unserer Annahme, dass $X \not\equiv 0$, haben wir $C_+ \neq 0$. Aus (15) folgt daher, dass $e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}}$, also, dass

$$e^{2\sqrt{\lambda}} = 0.$$

Daraus folgt, dass es eine ganze Zahl k gibt, sodass

$$\sqrt{\lambda} = k\pi i. \tag{16}$$

Mittels (13,14) erhalten wir daraus, dass

$$X(x) = C_+\left(e^{k\pi ix} - e^{-k\pi ix}\right) = C\sin(k\pi x), \qquad C := 2iC_+. \tag{17}$$

Fall $\lambda = 0$: Wie Sie in Mathematik I gelernt haben, ist in diesem Fall die allgemeine Lösung der Gleichung (12) gegeben durch

$$X(x) = C_1 x + C_0,$$

wobei C_0, C_1 Konstanten sind. Aus (8) und der Randbedingung $u(0,y) = g(0,y) = 0$ folgt, dass $X(0)Y(y) = u(0,y) = 0$ und daher, dass

$$0 = X(0) = C_0.$$

Aus (8) und der Randbedingung $u(1,y) = g(1,y) = 0$ folgt, dass $X(1)Y(y) = u(1,y) = 0$ und daher, dass $0 = X(1) = C_1 + C_0 = C_1$. Also gilt $X \equiv 0$. Das widerspricht unserer Annahme, dass $X \not\equiv 0$ und $Y \not\equiv 0$. Der Teilfall $\lambda = 0$ tritt also nicht auf.

Wir bestimmen jetzt die Funktion Y. Wegen unserer Annahme, dass $X \not\equiv 0$, gibt es ein $x_0 \in [0,1]$, sodass $X(x_0) \neq 0$. Indem wir $x := x_0$, $y := y_0$ in (9) einsetzen und durch $X(x_0)Y(y_0)$ dividieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} &= -\frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)}\\ &= \lambda \qquad \text{(wegen (11))}\\ &= (k\pi i)^2 \qquad \text{(wegen (16))}\\ &= -k^2\pi^2.\end{aligned}$$

Aus (9) mit $x = x_0$ folgt daher, dass

$$Y'' = k^2\pi^2 Y. \tag{18}$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für Y. Da $\lambda \neq 0$, ist $k \neq 0$. Wie Sie in Mathematik I gelernt haben, ist daher die allgemeine Lösung der GDG (18) gegeben durch

$$Y(y) = c_+ e^{k\pi y} + c_- e^{-k\pi y}, \tag{19}$$

wobei $c_\pm$ Konstanten sind. Aus (8) und der Randbedingung $u(x, y = 0) = g(x,0) = 0$ folgt, dass $X(x)Y(0) = u(x,0) = 0$, für alle $x \in [0,1]$. Weil $X \not\equiv 0$, folgt daraus, dass

$$0 = Y(0) = c_+ e^0 + c_- e^0 = c_+ + c_-,$$

also, dass

$$c_- = -c_+. \tag{20}$$

Für jedes $x \in [0,1]$ haben wir

$$\begin{aligned} C\sin(k\pi x)Y(1) &= X(x)Y(1) \qquad \text{(wegen (17))} \\ &= u(x,1) \qquad \text{(wegen (8))} \\ &= \sin(\pi x)\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} \qquad \text{(Randbedingung).} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $k = 1$ und

$$\begin{aligned} \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} &= CY(1) \\ &= Cc_+\left(e^\pi - e^{-\pi}\right) \qquad \text{(wegen (13,20)),} \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad Cc_+ = \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= C\sin(\pi x)c_+\left(e^{\pi y} - e^{-\pi y}\right) \qquad \text{(wegen (17,19))} \\ &= \sin(\pi x)\frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{2} \\ &= \sin(\pi x)\sinh(\pi y). \end{aligned} \tag{22}$$

($\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ist der Sinus hyperbolicus.)

Wir überprüfen, dass u tatsächlich das Dirichletproblem löst. Wir überprüfen zuerst, dass u die Laplace-Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ löst. Mittels (22) berechnen wir

$$\begin{aligned} u_x &= \pi\cos(\pi x)\sinh(\pi y), \\ u_{xx} &= -\pi^2\sin(\pi x)\sinh(\pi y), \\ u_y &= \pi\sin(\pi x)\cosh(\pi y), \\ u_{yy} &= \pi^2\sin(\pi x)\sinh(\pi y), \end{aligned}$$

wobei $\cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ der Kosinus hyperbolicus ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} \\ &= -\pi^2\sin(\pi x)\sinh(\pi y) + \pi^2\sin(\pi x)\sinh(\pi y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nun überprüfen wir die Randbedingungen $u(x,y) = g(x,y)$ auf ∂A:

1. Für $x = 0$ ist $u(0,y) = \sin(0)\sinh(\pi y) = 0 = g(0,y)$.

2. Für $x = 1$ ist $u(1,y) = \sin(\pi)\sinh(\pi y) = 0 = g(1,y)$.

3. Für $y = 0$ ist $u(x,0) = \sin(\pi x)\sinh(0) = 0 = g(x,0)$.

4. Für $y = 1$ ist $u(x,1) = \sin(\pi x)\sinh(\pi) = \sin(\pi x)\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} = g(x,1)$.

Somit erfüllt die Funktion $u(x,y) = \sin(\pi x)\sinh(\pi y)$ die Laplace-Gleichung in $A := [0,1]\times[0,1]$ und die Randbedingungen auf ∂A. Sie löst daher tatsächlich das Dirichlet-Randwertproblem.

8.6. Laplaceoperator für $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten. Wir schreiben

$$(X,Y) := \Psi, \qquad X(r,\varphi) = r\cos\varphi, \qquad Y(r,\varphi) = r\sin\varphi.$$

Zuerst berechnen wir

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial r} = \sin\varphi, \tag{23}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi. \tag{24}$$

Da $v = u\circ\Psi$, erhalten wir mittels der Kettenregel und (23), dass

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{25}$$

Mittels der Kettenregel und (23) erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial Y}{\partial r}\right)\cos(\varphi) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial Y}{\partial r}\right)\sin(\varphi) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\varphi). \end{aligned} \tag{26}$$

Mittels der Kettenregel und (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Mittels der Kettenregel, der Produktregel und (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi\right) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial X}{\partial \varphi} r\sin\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} r\sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial X}{\partial \varphi} r\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\sin^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} r^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\varphi \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Mit Hilfe von (26,25,27) und der Formel $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ folgt, dass

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\circ\Psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\circ\Psi = (\Delta u)\circ\Psi,$$

wie behauptet.