9.1. Laplacegleichung auf der Kreisscheibe, Poisson-Formel, Maximum- und Minimumprinzip.

(i) Um $u(0,0)$ zu berechnen, verwenden wir die Poisson-Formel für die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung auf der Einheitskreisscheibe. Die Poisson-Formel lautet:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g\big(\cos\psi,\sin\psi\big)}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi, \\ \text{wobei}\quad (x,y) &= r\big(\cos\varphi,\sin\varphi\big). \end{aligned} \tag{1}$$

((r,φ) sind die Polarkoordinaten von (x,y), d. h., r ist der Abstand von (x,y) zum Ursprung und φ der Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden durch den Ursprung und durch (x,y).) Für $(x,y)=(0,0)$ ist $r=0$ und φ beliebig. Gemäss Aufgabenstellung ist $g(x_0,y_0)=x_0^3$, also

$$g\big(\cos\psi,\sin\psi\big)=\cos^3\psi.$$

Indem wir das in (1) einsetzen, erhalten wir

$$u(0,0)=\frac{1-0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\psi}{1-0+0}d\psi \tag{2}$$

Mit der Substitution $\vartheta:=\psi-\pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi}\cos^3\psi\,d\psi &= \int_0^\pi\cos^3(\vartheta+\pi)\,d\vartheta \\ &= -\int_0^\pi\cos^3(\vartheta)\,d\vartheta. \quad \text{(Wir verwenden } \cos(\vartheta+\pi)=-\cos(\vartheta).\text{)} \end{aligned}$$

Indem wir das in (2) einsetzen, erhalten wir

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^3\psi\,d\psi=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi\cos^3\psi\,d\psi+\int_\pi^{2\pi}\cos^3\psi\,d\psi\right)=0.$$

(ii) Um die Ungleichung $u(x,y)\le 1$ für jedes $(x,y)\in B^2$ zu zeigen, verwenden wir das Maximumprinzip für harmonische Funktionen. Dieses Prinzip besagt, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum auf dem Rand ihres Definitionsbereichs annimmt. In unserem Fall ist der Definitionsbereich die Einheitskreisscheibe B^2, und der Rand ist der Einheitskreis ∂B^2. Gemäss Aufgabenstellung ist u harmonisch und gilt

$$u(x,y)\to g(x_0,y_0):=x_0^3 \quad \text{für } (x,y)\to(x_0,y_0), \qquad \forall (x_0,y_0)\in\partial B^2.$$

Gemäss dem Maximumprinzip gilt daher, dass

$$u(x,y) \leq \max_{x_0 \in \partial B^2} g(x_0) = \max_{x_0 \in \partial B^2} x_0^3 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2. \tag{3}$$

Wir betrachten ein $(x_0, y_0) \in \partial B^2$, d. h., (x_0, y_0) liegt auf dem Einheitskreis. Es gilt daher $x_0^2 + y_0^2 = 1$, also $x_0^2 = 1 - y_0^2 \leq 1$ und darum, dass $x_0 \leq 1$. Indem wir das in (3) einsetzen, erhalten wir, dass

$$u(x,y) \leq 1 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2.$$

Um die Ungleichung $u(x,y) \leq 1$ für jedes $(x,y) \in B^2$ zu zeigen, verwenden wir das Minimumprinzip für harmonische Funktionen. Dieses Prinzip besagt, dass eine harmonische Funktion ihr Minimum auf dem Rand ihres Definitionsbereichs annimmt. Es gilt daher, dass

$$u(x,y) \geq \min_{x_0 \in \partial B^2} g(x_0) = \min_{x_0 \in \partial B^2} x_0^3 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2. \tag{4}$$

Wir betrachten ein $(x_0, y_0) \in \partial B^2$, d. h., (x_0, y_0) liegt auf dem Einheitskreis. Es gilt daher $x_0^2 + y_0^2 = 1$, also $x_0^2 = 1 - y_0^2 \leq 1$ und darum, dass $x_0 \geq -1$. Indem wir das in (3) einsetzen, erhalten wir, dass

$$u(x,y) \geq -1 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2.$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$-1 \leq u(x,y) \leq 1 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2.$$

9.2. Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung. Um die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung zu zeigen, verwenden wir das Maximumprinzip. Dieses Prinzip besagt, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum auf dem Rand ihres Definitionsbereichs annimmt. In unserem Fall ist der Definitionsbereich die Einheitskreisscheibe B^2, und der Rand ist der Einheitskreis ∂B^2.

Seien u_0 und u_1 Lösungen des Dirichlet-Randwertproblems

$$\Delta u = f \quad \text{in } B^2, \tag{5}$$

$$u(x,y) \to g(x_0, y_0) \quad \text{für } (x,y) \to (x_0, y_0), \qquad \forall (x_0, y_0) \in \partial B^2. \tag{6}$$

Wir betrachten einen Punkt $(x,y) \in B^2$. Wir zeigen, dass $u_0(x,y) = u_1(x,y)$. Dazu zeigen wir zuerst, dass $u_0(x,y) \leq u_1(x,y)$. Wir betrachten die Funktion $w := u_1 - u_0$. Indem wir (5) verwenden, erhalten wir

$$\Delta w = \Delta u_1 - \Delta u_0 = f - f = 0.$$

Aus (6) folgt, dass

$$w(x,y) = u_1(x,y) - u_0(x,y) \to g(x_0,y_0) - g(x_0,y_0) = 0 \text{ für } (x,y) \to (x_0,y_0),\ \forall (x_0,y_0) \in \partial B^2.$$

Die Funktion w ist also harmonisch und nimmt auf dem Rand den Wert 0 an. Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt daraus, dass $w \leq 0$. Aus dem Minimumprinzip folgt, dass $w \geq 0$. Also gilt $w = 0$, d. h.

$$u_0 = u_1,$$

wie behauptet.

9.3. Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe mittels Fourierreihe.

(i) Wir betrachten das folgende Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{auf } B^2 \tag{7}$$

$$u(x,y) = g(x,y) := x^3 \qquad \text{für } (x,y) \in \partial B^2. \tag{8}$$

Um dieses Problem zu lösen, wechseln wir zu Polarkoordinaten. Wie wir in der Übungsserie 8 gesehen haben, suchen wir also nach einer Lösung $v : [0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Randwertproblems

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \text{für } 0 < r < 1,\ \varphi \in \mathbb{R},$$

$$v(1,\varphi) = h(\varphi) := g(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^3(\varphi), \qquad \text{für } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben ist die Lösung dieser PDG gegeben durch

$$v(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}_k r^{|k|} e^{ik\varphi}, \tag{9}$$

wobei $\widehat{h}_k$ den k-ten Fourierkoeffizienten von h bezeichnet. Mittels der eulerschen Formel und der binomischen Formel erhalten wir

$$h(\varphi) = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} e^{3i\varphi} + \frac{3}{8} e^{i\varphi} + \frac{3}{8} e^{-i\varphi} + \frac{1}{8} e^{-3i\varphi}.$$

Aus dieser Darstellung von h können wir die Fourierkoeffizienten von h ablesen. Diese sind:

$$\widehat{h}_{-3} = \frac{1}{8}, \qquad \widehat{h}_{-1} = \frac{3}{8}, \qquad \widehat{h}_1 = \frac{3}{8}, \qquad h_3 = \frac{1}{8}$$

und

$$\widehat{h}_k = 0, \text{ falls } k \neq \pm 1, \pm 3.$$

Mittels (9) erhalten wir also

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{8} r^3 e^{3i\varphi} + \frac{3}{8} r e^{i\varphi} + \frac{3}{8} r e^{-i\varphi} + \frac{1}{8} r^3 e^{-3i\varphi}. \tag{10}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} (x,y) &= r\big(\cos\varphi, \sin\varphi\big), \\ e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi} &= 8\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 - 6\cdot\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\ &= 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir aus (10) in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v(r,\varphi) \\ &= \frac{3}{4} r\cos\varphi + \frac{1}{8} r^3 \left(e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}\right) \\ &= \frac{3}{4}x + r^3\cos^3\varphi - \frac{3}{4} r^3 \cos\varphi \\ &= \frac{3}{4}x + x^3 - \frac{3}{4} r^2 x \\ &= \frac{3}{4}x + x^3 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2 x \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2 x. \end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen die partiellen Ableitungen von $u(x,y) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2 x$:

1. Erste partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2$$

2. Erste partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{2}xy$$

3. Zweite partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{2}x$$

4. Zweite partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{3}{2}x$$

Wir erhalten also

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x = 0.$$

Nun überprüfen wir, dass $u(x,y) = g(x,y) := x^3$ für $(x,y) \in \partial B^2$. Falls $(x,y) \in \partial B^2$, dann gilt $y^2 = 1 - x^2$ und damit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}y^2 x \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^3 \\ &= x^3, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

9.4. Laplacegleichung auf dem Quadrat, unendliche Superposition.

(i) Wir definieren

$$h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} g(x,\pi), & \text{falls } x \geq 0, \\ -g(-x,\pi), & \text{falls } x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Um eine Lösung des Dirichletproblems zu finden, nehmen wir an, dass u dieses Problem löst und die folgende Form hat:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,y), \tag{12}$$

$$u_k(x,y) := \sin(kx)\sinh(ky). \tag{13}$$

($\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ist der Sinus hyperbolicus.) Wir machen also den Ansatz, dass u eine unendliche Superposition ist von Lösungen der Laplacegleichung ist.

Wir bestimmen die Koeffizienten c_k. Wir definieren die trigonometrischen Fourierkoeffizienten a_k, b_k von h wie in der Vorlesung (mit Periode $P = 2\pi$), aber durch Integration auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, also:

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)dx = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

da der Integrand ungerade ist,

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin(kx)dx, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

da der Integrand gerade ist. Für $x \in [0,\pi]$ haben wir daher

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\\
&= h(x)\,\text{(Proposition aus der Vorlesung, Fourierreihe in Kosinus-Sinus-Form)}\\
&= u(x,\pi) \qquad \text{(wegen der Randbedingung)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(k\pi)\sin(kx) \qquad \text{(wegen (12,13))}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
&b_k = c_k \sinh(k\pi),\\
\text{d. h.,}\quad &c_k = \frac{b_k}{\sinh(k\pi)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Mittels partieller Integration berechnen wir

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)\sin(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\, x(x-\pi)\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2x-\pi)\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\left[(2x-\pi)\frac{-1}{k^2}\sin(kx)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-1}{k^2}\sin(kx)\cdot 2\,dx\right] \\
&= -\frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \sin(kx)\,dx \\
&= -\frac{4}{\pi k^2}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{4}{\pi k^2}\left(-\frac{1}{k}\cos(k\pi) - \left(-\frac{1}{k}\cos(0)\right)\right) \\
&= -\frac{4}{\pi k^2}\left(-\frac{1}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{4}{\pi k^3}\left(1-(-1)^k\right) && (15) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ -\dfrac{8}{\pi k^3}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} && (16)
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{\sinh(k\pi)} u_k(x,y) \qquad \text{(wegen (12,14))} \\
&= \sum_{k=1,\dots,\infty:\, k \text{ ungerade}} \frac{-8}{k^3\pi\sinh(k\pi)}\sin(kx)\sinh(ky) \quad \text{(wegen (16,13)).} && (17)
\end{aligned}
$$

(ii) Unter Verwendung der Identitäten

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin \qquad \sinh' = \cosh \qquad \cosh' = \sinh$$

können wir sehen, dass

$$\Delta u_k(x,y) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = -k^2\sin(kx)\sinh(ky) + k^2\sin(kx)\sinh(ky) = 0.$$

Wegen (12) und der Linearität des Laplace-Operators Δ folgt, dass

$$\Delta u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Delta u_k(x,y) = 0.$$

Wegen (12) und $\sin(0) = \sin(k\pi) = 0$, haben wir $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$. Aus $\sinh(0) = 0$ folgt $u(x,0) = 0$. Nun berechnen wir mittels (17):

$$\begin{aligned} u(x,\pi) &= \sum_{k=1,\ldots,\infty:\, k \text{ ungerade}} \frac{-8}{k^3\pi \sinh(k\pi)} \sin(kx)\sinh(k\pi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \qquad \text{(wegen (16))} \\ &= g(x,\pi) \\ &= x(x-\pi), \end{aligned}$$

wie gewünscht.