10.1. Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung auf einem Halbraum Wir schreiben

$$\alpha_n := \mathrm{Vol}_n(\overline{B}^n)$$

und definieren den *Poissonkern für* $\mathbb{R}^n_+$ als die Funktion

$$K_{\mathbb{R}^n_+} : \mathbb{R}^n_+ \times \big(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big) \to \mathbb{R}, \qquad K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \frac{2}{n\alpha_n}\frac{x_n}{\|x-y\|^n}.$$

Im Fall $n = 3$ ist $\alpha_n = \frac{4\pi}{3}$ und daher

$$K_{\mathbb{R}^3_+}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_3}{\|x-y\|^3}.$$

Wir definieren

$$u : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \int_{\mathbb{R}^2\times\{0\}} K_{\mathbb{R}^3_+}(x,y)\big(g(y) = 1\big)dy. \tag{1}$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum) löst diese Funktion das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^3_+, \tag{2}$$

$$u(x) \to g(x_0) := 1 \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \tag{3}$$

Wir betrachten zunächst einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3_+$ der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 = z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } z \in (0,\infty).$$

Das Integral (1) ist dann gegeben durch

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{z}{\big(y_1^2 + y_2^2 + (z-0)^2\big)^{\frac{3}{2}}}dy. \tag{4}$$

Um $u(x)$ zu berechnen, verwenden wir Polarkoordinaten in der (y_1, y_2)-Ebene, da der Integrand von (4) drehinvariant ist. Wir betrachten also die Teilmenge

$$U := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$$

und die Koordinatentransformation

$$\psi : U \to \mathbb{R}^2, \qquad y := \psi(r,\varphi) := r\big(\cos\varphi, \sin\varphi\big).$$

($r = \|y\|$ ist der Radius, also der Abstand zwischen 0 und $y \in \mathbb{R}^2$ und φ ist der Winkel in der (y_1, y_2)-Ebene.) Die Abbildung $\psi : U \to \mathrm{im}(\psi)$ ist ein glatter Diffeomorphismus. Gemäss einem Beispiel aus der Vorlesung Analysis 2 ist die Determinante der Jacobi-Matrix von ψ gegeben durch

$$\det\big(d\psi(r,\varphi)\big) = r. \tag{5}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{z}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} r\, d\varphi\, dr \qquad \text{(wegen (4), Substitution und (5))}\\
&= -\frac{2\pi z}{2\pi}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{r=0}^{\infty}\\
&= -z\left(0 - \frac{1}{z}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können direkt nachprüfen, dass u tatsächlich das Randwertproblem (2,3) löst.

10.2. Lösung der Poissongleichung, homogen geladene Kugel.

(i) Für $n \geq 3$ definieren wir die *Fundamentallösung* (oder *Grundlösung*) *der Laplacegleichung* als die Funktion

$$\Phi_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi_n(x) := \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}\frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

Im Fall $n = 3$ ist $\alpha_n = \frac{4\pi}{3}$ und daher

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Wir definieren die Funktion

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_3(x-y) f(y) dy. \tag{7}$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Lösung der Poissongleichung) löst diese Funktion die Poissongleichung

$$-\Delta u = f.$$

Um u zu berechnen, verwenden wir Kugelkoordinaten, da die Funktionen Φ_3 und f drehinvariant sind. Wir betrachten also die Teilmenge

$$U := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Koordinatentransformation

$$\psi : U \to \mathbb{R}^3, \qquad y := \psi(r,\varphi,\theta) := r\big(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta\big).$$

($r = \|y\|$ ist der Radius, also der Abstand zwischen 0 und $y \in \mathbb{R}^3$, φ ist der Winkel in der (y_1, y_2)-Ebene und θ der Winkel zwischen der positiven y_3-Achse und dem Ortsvektor des Punktes $y \in \mathbb{R}^3$.) Analog zur Lösung zu einer Aufgabe[1] in Übungsserie 8 in Analysis 2 ist $\psi : U \to \psi(U)$ ein glatter Diffeomorphismus und die Determinante der Jacobi-Matrix von ψ gegeben durch

$$\det\big(d\psi(r,\varphi,\theta)\big) = r^2\sin\theta, \qquad \forall (r,\varphi,\theta) \in U. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt zunächst einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 = z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } z \in [0,\infty). \tag{9}$$

Sei $(r,\varphi,\theta) \in U$. Wir definieren $y := \psi(r,\varphi,\theta)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - y \right\|^2 &= r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + (z - r\cos\theta)^2 \\ &= r^2\sin^2\theta + z^2 + r^2\cos^2\theta - 2zr\cos\theta \\ &= r^2 + z^2 - 2zr\cos\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} 4\pi u(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_{\overline{B}^3}(y)}{\|x-y\|} dy \qquad \text{(gemäss (6) und (7))} \\ &= \int_{\overline{B}^3} \frac{1}{\big\|(0,0,z) - y\big\|} dy \qquad \text{(gemäss unserer Annahme } x = (0,0,z)) \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2zr\cos\theta}} d\varphi\, d\theta\, dr \\ &\qquad \text{(gemäss der Substitutionsregel aus Analysis 2 und (10,8)).} \end{aligned} \tag{11}$$

[1] In jener Aufgabe betrachteten wir die Koordinatentransformation $\widetilde{\psi}$ gegeben durch $\widetilde{\psi}(r,\varphi,\theta) := r\big(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta\big)$. Die Rechnungen für $\widetilde{\psi}$ und ψ sind analog.

Mittels der Substitution $u = \cos\theta$ erhalten wir $\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta$ und daher

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+z^2-2zr\cos\theta}} d\theta &= -\int_{\cos 0=1}^{\cos\pi=-1} \left(r^2+z^2-2zru\right)^{-\frac{1}{2}} du \\
&= -\frac{2}{-2zr}\left(r^2+z^2-2zru\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{-1} \\
&= \frac{1}{zr}\left(\sqrt{r^2+z^2+2zr} - \sqrt{r^2+z^2-2zr}\right) \\
&= \frac{1}{zr}\left(|r+z| - |r-z|\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{r}, & \text{falls } z < r, \\ \frac{2}{z}, & \text{falls } z > r. \end{cases}
\end{aligned}$$

Indem wir das in (11) einsetzen, erhalten wir im **Fall** $z \geq 1$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{z} r^2 \, d\varphi \, dr = \frac{1}{z}\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^1 = \frac{1}{3z}. \tag{12}$$

Im Fall $z < 1$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{2\pi}{4\pi}\left(\int_0^z \frac{2}{z} r^2 \, dr + \int_z^1 \frac{2}{r} r^2 \, dr\right) \\
&= \frac{r^3}{3z}\Big|_{r=0}^z + \frac{r^2}{2}\Big|_{r=z}^1 \\
&= \frac{z^2}{3} - 0 + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{6}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Wegen (7,6) und $f = \chi_{\overline{B}^3}$ ist die Funktion u drehinvariant, d. h. $u(x) = u(R(x))$ für jede Drehung R und $x \in \mathbb{R}^3$. Da jedes $x \in \mathbb{R}^3$ durch eine Drehung auf die Form (9) gebracht werden kann, folgt aus (12,13) daher, dass

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\|x\|}, & \text{falls } \|x\| \geq 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{\|x\|^2}{6}, & \text{falls } \|x\| < 1. \end{cases} \tag{14}$$

(ii) Das Volumen der Einheitskugel $\overline{B}^3$ ist gleich $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$. (Das haben wir in Analysis 2 in Übungsserie 12 mit Hilfe des Satzes von Fubini berechnet.) Daraus folgt, dass die (Volumen-)Ladungsdichte gegeben ist durch

$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}}\chi_{\overline{B}^3} = \frac{3}{4\pi} q \chi_{\overline{B}^3}.$$

Gemäss Teilaufgabe (i) löst die Funktion u gegeben durch (14) die Poissongleichung

$$-\Delta u = \chi_{\overline{B}^3}.$$

Durch den Vergleich mit der Gleichung $-\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ folgt, dass

$$\varphi = \frac{3}{4\pi}\frac{q}{\varepsilon_0}u = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\|x\|}, & \text{falls } \|x\| \geq 1, \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left(3 - \|x\|^2\right), & \text{falls } \|x\| < 1. \end{cases}$$

Bemerkung: Das durch eine homogen geladene Kugel mit Gesamtladung q erzeugte elektrostatische Potential φ ist also ausserhalb der Kugel gleich dem Coulombpotential einer Punktladung q, die sich im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ befindet. Aus elektrostatischer Sicht können wir die geladene Kugel also durch eine Punktladung ersetzen, falls wir das Potential nur ausserhalb der Kugel betrachten.

(iii) Sei $i = 1, 2, 3$. Es gilt

$$\frac{d}{dx_i}\frac{1}{\|x\|} = \frac{d}{dx_i}(\|x\|^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\|x\|^2)^{-\frac{3}{2}}2x_i = -\frac{x_i}{\|x\|^3}.$$

Gemäss Teilaufgabe (ii) gilt für die elektrische Feldstärke daher

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{\|x\|^3}, & \text{falls } \|x\| \geq 1, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}x, & \text{falls } \|x\| < 1. \end{cases}$$

10.3. Integral über die Sphäre Wir berechnen

$$D_1\psi(y) = \partial_\varphi\psi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2\psi(y) = \partial_\theta\psi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$\left\|\partial_\varphi\psi(\varphi,\theta)\right\| = \sqrt{\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta + 0} = \sin\theta, \tag{15}$$

$$\left\|\partial_\theta\psi(\varphi,\theta)\right\| = \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1. \tag{16}$$

Die Vektoren $\partial_\varphi \psi(\varphi, \theta)$ und $\partial_\theta \psi(\varphi, \theta)$ stehen senkrecht aufeinander. Daher gilt

$$\big\|\partial_\varphi \psi(\varphi, \theta) \times \partial_\theta \psi(\varphi, \theta)\big\| = \big\|\partial_\varphi \psi(\varphi, \theta)\big\|\big\|\partial_\theta \psi(\varphi, \theta)\big\| = \sin\theta, \tag{17}$$

wobei wir im zweiten Schritt (15,16) verwendet haben. Gemäss Analysis 2 gilt

$$\begin{aligned}\int f\, dA &= \int_V f \circ \psi(y)\big\|D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)\big\| dy \\ &= \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f \circ \psi(\varphi, \theta) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta \qquad \text{(gemäss (17))}.\end{aligned}$$

10.4. Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball. Wir definieren den *Poissonkern für B^n* als die Funktion

$$K_{B^n} : B^n \times S^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad K_{B^n}(x, y) := \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}.$$

Wir definieren

$$u : B^3 \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \int_{S^2} K_{B^3}(x, y)\big(g(y) = 1\big)\, dA(y). \tag{18}$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum) löst diese Funktion das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } B^3, \tag{19}$$

$$u(x) \to g(x_0) = 1 \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial B^3 = S^2. \tag{20}$$

Wir betrachten zunächst einen Punkt $x \in B^3$ der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 = z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } z \in [0, 1).$$

Gemäss (18) haben wir

$$\begin{aligned}
u(x) =& \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}(1-z^2)\left(y_1^2+y_2^2+(z-y_3)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dA(y)\\
=& \frac{1-z^2}{4\pi}\int_0^{\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+z^2-2z\cos\theta\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\\
&\text{(gemäss (10) mit } r=1\text{, mittels Subsitution (sphärische Koordinaten) und Aufgabe 10.3)}\\
=& -\frac{2\pi}{4\pi}(1-z^2)\int_1^{-1}\left(1+z^2-2zu\right)^{-\frac{3}{2}}\,du \qquad \text{(Substitution } u=\cos\theta\text{)}\\
=& -\frac{1-z^2}{2}\frac{-2}{-2z}\left(1+z^2-2zu\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{-1}\\
=& -\frac{1-z^2}{2z}\left(\left(1+z^2+2z\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+z^2-2z\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\
=& -\frac{1-z^2}{2z}\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-z}\right)\\
&= -\frac{1}{2z}\left(1-z-(1+z)\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Die Funktion u ist drehinvariant. (Warum?) Es folgt, dass

$$u(x)=1, \qquad \forall x\in B^3.$$

10.5. Poissonformel für die Kreisscheibe.

Für $n=2$ lautet die Formel für das Randwertproblems fÃ¼r den Einheitsball als

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^2}g(y)\,dA(y).$$

Wir drücken x in Polarkoordinaten aus, indem wir $x=r(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ für $\varphi\in[0,2\pi]$ und $r>0$. Außerdem parametrisieren wir S^1 mit $y=(\cos(\psi),\sin(\psi))$ für $\psi\in[0,2\pi]$ (siehe Beispiel 6.3 aus den Notizen von Dr. Fabian Ziltener für Analysis II) und erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^2}g(y)\,dA(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{\|r(\cos(\varphi),\sin(\varphi))-(\cos(\psi),\sin(\psi))\|^2}g((\cos(\psi),\sin(\psi)))\,d\psi.$$

Und da

$$\begin{aligned}\|r(\cos(\varphi),\sin(\varphi)) - (\cos(\psi),\sin(\psi))\|^2 &= (r\cos(\varphi)-\cos(\psi))^2 + (r\sin(\varphi)-\sin(\psi))^2\\ &= r^2 - 2r[\cos(\varphi)\cos(\psi)+\sin(\varphi)\cos(\psi)] + 1\\ &= r^2 - 2r\cos(\varphi-\psi)+1,\end{aligned}$$

haben wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^2}g(y)\,dA(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(\varphi-\psi)+1}g((\cos(\psi),\sin(\psi)))\,d\psi,$$

was die Poissonformel ist.