11.1. Greensche Funktion für den oberen Halbraum

(i) Wir folgen dem ersten Hinweis und zeigen zuerst, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n_+$ und jedes $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$ gilt

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(x-y)\Delta\varphi(y)\, dy = \varphi(x). \tag{1}$$

Dazu verwenden wir die Substitution $z = x - y$ und die Tatsache, dass $(\Delta\varphi)(x-z) = \Delta_x(\varphi(x-z))$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(x-y)\Delta\varphi(y)\, dy &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(z)\Delta\varphi(x-z)\, dz \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(z)\Delta_x\varphi(x-z)\, dz \\
&= -\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(z)\varphi(x-z)\, dz \ \text{ (Ableiten unter dem Integral)} \\
&= \varphi(x) \ \text{ (gemäss dem Satz “Lösung der Poissongleichung auf } \mathbb{R}^n\text{”)}.
\end{aligned}$$

Sei $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^n_+)$. Unter Verwendung des zweiten Hinweises, zeigen wir nun, dass

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(y-\tilde{x})\Delta\varphi(y)\, dy = 0. \tag{2}$$

Dazu wählen wir einen Ball $U = B_R(\xi) \subset \mathbb{R}^n_+$, sodass $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(\xi)$. Da $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt und in $\mathbb{R}^n_+$ enthalten ist, gibt es ein solches ξ und ein solches R. Nun wenden wir die zweite Greensche Identität an und erhalten

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi_n(y-\tilde{x})\Delta\varphi(y)\, dy &= -\int_{B_R(\xi)} \Phi_n(y-\tilde{x})\Delta\varphi(y)\, dy \\
&= -\int_{B_R(\xi)} \Delta\Phi_n(y-\tilde{x})\varphi(y)\, dy - \int_{\partial B_R(\xi)} \Phi_n(y-\tilde{x})\partial_\nu\varphi(y)\, dy \\
&\quad + \int_{\partial B_R(\xi)} \partial_\nu\Phi_n(y-\tilde{x})\varphi(y)\, dy \\
&= -\int_{B_R(\xi)} \Delta\Phi_n(y-\tilde{x})\varphi(y)\, dy \ \text{ (da } \mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(\xi)\text{)} \\
&= 0 \ \text{ (da } \tilde{x} \notin B_R(\xi)\text{, daher } \Delta\Phi_n(y-\tilde{x}) = 0 \text{ auf } B_R(\xi)\text{)}.
\end{aligned}$$

Wir kombinieren (1) und (2) und erhalten

$$-\int_U G^x(y)\Delta\varphi(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\Phi_n(y-x) - \Phi_n(y-\tilde{x})\right)\Delta\varphi(y)\, dy = \varphi(x).$$

Somit erfüllt $G(x, y)$ die erste Bedingung.

Sei $x \in \mathbb{R}^n_+$. Für jedes $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt, dass $\|y - x\| = \|y - \tilde{x}\|$. Daher gilt

$$\Phi_n(y - x) - \Phi_n(y - \tilde{x}) = 0.$$

Somit erfüllt $G(x, y)$ die zweite Bedingung.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^n_+$ und $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Der nach außen weisende Einheitsnormalenvektor auf ∂R^n_+ ist $\nu = \mathrm{e}_n = (0, \dots, 1)$, sodass

$$\begin{aligned} \partial_\nu G^x(y) &= (0, \dots, -1) \cdot \nabla G^x(y) \\ &= -\partial_{y_n} G^x(y) \\ &= -\partial_{y_n}\Phi_n(y - x) + \partial_{y_n}\Phi_n(y - \tilde{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

Nun bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \partial_{y_n}\left(|y - x|^{2-n}\right) &= \partial_{y_n}\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1-\frac{n}{2}} \\ &= (1 - \frac{n}{2})\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{-\frac{n}{2}} 2(y_n - x_n) \\ &= (2 - n)\frac{y_n - x_n}{\|y - x\|^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch eine ähnliche Rechnung erhalten wir

$$\partial_{y_n}\left(\|y - \tilde{x}\|^{2-n}\right) = (2 - n)\frac{y_n + x_n}{\|y - \tilde{x}\|^n}. \tag{5}$$

Sei $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Es gilt $y_n = 0$ und darum

$$\|y - x\| = \|y - \tilde{x}\|. \tag{6}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} -\partial_\nu G^x(y) &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{\|y - x\|^n} - \frac{y_n + x_n}{\|y - \tilde{x}\|^n}\right] \qquad \text{(wegen (3,4,5))} \\ &= \frac{2}{n\alpha(n)}\frac{x_n}{\|y - x\|^n} \qquad \text{(wegen (6))} \\ &= K_{\mathbb{R}^n_+}(x, y). \end{aligned}$$

(iii) Mit einem Satz aus der Vorlesung haben wir

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} u(y)\partial_\nu G^x(y)\,dA(y) + \int_{\mathbb{R}^n_+} G^x(y)\Delta u(x)\,dy \\
&= -\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} u(y)\partial_\nu G^x(y)\,dA(y) \;\; (\text{da } \Delta u = 0) \\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y)g(y)\,dA(y) \;\; (\text{unter Verwendung von (ii) und } u = g \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+).
\end{aligned}$$

11.2. Greensche Funktion für den Einheitsball

Diese Aufgabe ist ähnlich wie die vorherige, daher skizzieren wir die Lösung nur.

(i) Sei $\varphi \in C^2_c(B^n,\mathbb{R})$. Wir zeigen, dass

$$-\int_{B^n} \Phi_n(\|x\|(y-\tilde{x}))\Delta\varphi(y)\,dy = 0. \tag{7}$$

Wie zuvor wählen wir dazu einen Ball $U = B_R(\xi) \subset B^n$, sodass $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(\xi)$. Unter Verwendung des Hinweises und der zweiten Greenschen Identität erhalten wir, dass

$$-\int_{B^n} \Phi_n(\|x\|(y-\tilde{x}))\Delta\varphi(y)\,dy = -\|x\|^{2-n}\int_{B_R(\xi)} \Phi_n(y-\tilde{x})\Delta\varphi(y)\,dy = 0.$$

Hier haben wir die Tatsache verwendet, dass $\tilde{x} \notin B_R(\xi)$ und daher $\Delta\Phi_n(y-\tilde{x}) = 0$ auf $B_R(\xi)$. Wir kombinieren (1) und (7) und erhalten

$$-\int_{B^n} \left(\Phi_n(y-x) - \Phi_n(\|x\|(y-\tilde{x}))\right)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(x).$$

Somit erfüllt $G = G_{B^n}$ die erste Bedingung.

Sei $x \in B^n$. Sei $y \in \partial B^n = S^{n-1}$. Es gilt

$$\|y\| = 1, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\|x\|^2\|y-\tilde{x}\|^2 &= \|x\|^2\left(\|y\|^2 - 2\frac{x\cdot y}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2}\right) \\
&= \|x\|^2 - 2x\cdot y + \|y\|^2 \qquad (\text{wegen (8)}) \\
&= \|y-x\|^2 \qquad (9)
\end{aligned}$$

und daher

$$G^x(y) = \Phi_n(y-x) - \Phi_n(y-\tilde{x}) = 0.$$

Somit erfüllt $G = G_{B^n}$ die zweite Bedingung.

(ii) Sei $x \in B^n$ und $y \in \partial B^n$. Der nach außen weisende Einheitsnormalenvektor auf ∂B^n ist $\nu(y) = y$, sodass gilt

$$\partial_\nu G^x(y) = y \cdot \nabla G^x(y). \tag{10}$$

Nun berechnen wir $\nabla G^x(y)$. Es gilt

$$\partial_{y_i} \Phi_n(y - x) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i - x_i}{\|y - x\|^n}. \tag{11}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{y_i} \Phi_n(\|x\|(y - \tilde{x})) &= \|x\|^{2-n} \partial_{y_i} \Phi_n((y - \tilde{x})) \\
&= \frac{\|x\|^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)} \partial_{y_i} \|y - \tilde{x}\|^{2-n} \\
&= -\frac{\|x\|^{2-n}}{n\alpha(n)} \frac{y_i - \tilde{x}_i}{\|y - \tilde{x}\|^n} \\
&= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\|x\|^2 y_i - x_i}{\|x\|^n \|y - \tilde{x}\|^n} \\
&= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\|x\|^2 y_i - x_i}{(\|x\|^2 \|y - \tilde{x}\|^2)^{n/2}} \\
&= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\|x\|^2 y_i - x_i}{\|y - x\|^n} \quad \text{(unter Verwendung von (9) für } y \in \partial B^n\text{).}
\end{aligned} \tag{12}$$

Da

$$\partial_{y_i} G^x(y) = \partial_{y_i} \Phi_n(y - x) - \partial_{y_i} \Phi_n(\|x\|(y - \tilde{x})),$$

gilt

$$\begin{aligned}
-\partial_\nu G^x(y) &= -\sum_{i=1}^n y_i \partial_{y_i} \Phi_n(y - x) - y_i \partial_{y_i} \Phi_n(\|x\|(y - \tilde{x})) \qquad \text{(wegen (10))} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{n\alpha(n)\|y - x\|^n} (1 - \|x\|^2) \qquad \text{(wegen (11,12))} \\
&= \frac{\|y\|^2}{n\alpha(n)\|y - x\|^n} (1 - \|x\|^2) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - \|x\|^2}{\|y - x\|^n} \qquad \text{(da } y \in \partial B^n = S^{n-1}\text{)} \\
&= K_{B^n}(x, y).
\end{aligned}$$

(iii) Mit einem Satz aus der Vorlesung haben wir

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int_{\partial B^n} u(y)\partial_\nu G^x(y)\,dA(y) + \int_{B^n} G^x(y)\Delta u(x)\,dy \\
&= -\int_{\partial B^n} u(y)\partial_\nu G^x(y)\,dA(y) \ \text{ (da } \Delta u = 0) \\
&= \int_{\partial B^n} K_{B^n}(x,y)g(y)\,dA(y) \ \text{ (unter Verwendung von (ii) und } u = g \text{ auf } \partial B^n).
\end{aligned}$$

11.3. Harmonizität von Funktion Sei $h \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine Funktion, wofür es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass

$$\Delta h(x_0) \neq 0.$$

Fall $\Delta h(x_0) > 0$: Da $h \in C^2$, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B^n_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und $\Delta h \geq \frac{1}{2}\Delta h(x_0)$ auf $B^n_\varepsilon(x_0)$. Wir wählen eine Funktion $\varphi \in C^2_c(B^n_\varepsilon(x_0), \mathbb{R}_+)$, sodass $\varphi = 1$ auf $B^n_{\varepsilon/3}(x_0)$. (Diese Funktion werden wir am Ende dieser Aufgabe konstruieren.) Nun wenden wir die zweite greensche Identität an und erhalten

$$0 < \int_{B^n_\varepsilon(x_0)} \varphi \Delta h = \int_{B^n_\varepsilon(x_0)} \Delta\varphi\, h - \int_{\partial B^n_\varepsilon(x_0)} \partial_\nu \varphi\, h + \int_{\partial B^n_\varepsilon(x_0)} \varphi \partial_\nu h = \int_{B^n_\varepsilon(x_0)} \Delta \varphi h.$$

Im Fall $\Delta h(x_0) < 0$ zeigt ein ähnliches Argument, dass

$$0 > \int_{B^n_\varepsilon(x_0)} \Delta\varphi h.$$

Falls es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, wofür $\Delta h(x_0) \neq 0$, dann gibt es daher ein $\varphi \in C^2_c(U, \mathbb{R}_+)$, sodass $\int_U \Delta\varphi h \neq 0$. Die Kontraposition dieser Implikation besagt:

Falls für jedes $\varphi \in C^2_c(U, \mathbb{R}_+)$ die Gleichheit $\int_U \Delta\varphi h = 0$ erfüllt ist, dann gilt für alle $x_0 \in U$, dass $\Delta h(x_0) = 0$, d. h., h ist harmonisch. Das ist die gewünschte Aussage.

Konstruktion von φ im Fall $\Delta h(x_0) > 0$: Wir definieren zunächst die Funktion $\rho : [0, 3] \to \mathbb{R}$. Um dies zu tun, benötigen wir die Hilfsfunktion

$$\widetilde{\rho} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\rho}(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Wir definieren nun ρ als

$$\rho(t) = \frac{\tilde{\rho}(t-1)}{\tilde{\rho}(t-1) + \tilde{\rho}(2-t)}$$

für $t \in [0, 2]$ und $\rho(t) = 1$ für $t \in [2, 3]$. Wir definieren dann

$$\varphi(x) = 1 - \rho\left(\frac{3}{\varepsilon}\|x\|\right).$$