12.1. Vektoranalytische Identität Seien $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ eine Funktion. Wir zeigen zuerst, dass

$$\nabla \cdot (fX) = (\nabla f) \cdot X + f \nabla \cdot X. \tag{0.1}$$

Dazu schreiben wir $X = (X_1, \ldots, X_n)$ and rechnen

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (fX) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(fX_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i \partial_{x_i} f + f \partial_{x_i} X_i) \quad \text{(wegen der Produktregel)} \\
&= (\nabla f) \cdot X + f \nabla \cdot X,
\end{aligned}$$

wie gewünscht. Nun setzen wir $f = u$ und $X = \nabla v$ in (0.1) und finden

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (u \nabla v) &= \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla \cdot \nabla v \\
&= \nabla u \cdot \nabla v + u \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\partial_{x_i} v) \\
&= \nabla u \cdot \nabla v + u \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i x_i} v \\
&= \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v.
\end{aligned}$$

12.2. Verschwindende Ableitung impliziert Konstanz. Seien $x_0, x_1 \in U$ und $x : [0,1] \to U$ ein glatter Weg von x_0 nach x_1, d.h. $x(0) = x_0$ und $x(1) = x_1$. Wir setzen $f := u \circ x$ und wir merken, dass $f(0) = u(x_0)$ und $f(1) = u(x_1)$. Mittels der Kettenregel haben wir

$$\frac{d}{dt} f(t) = (Du \circ x) \frac{dx}{dt} = 0$$

weil $Du = 0$. Wegen des Mittelwertsatzes von Analysis I haben wir, dass f konstant ist. Somit finden wir

$$u(x_1) = f(1) = f(0) = u(x_0).$$

12.3. Drehinvarianz des Gradienten und des Laplace-Operators, Invarianz der Divergenz unter volumenerhaltenden Transformationen

(i) Wir nehmen $\Phi(x) = Ox + v$ an und rechnen

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\Phi^* f\right)(x) &= \left(D\left(f\circ\Phi\right)\right)^T(x) \quad (\text{weil } \nabla f = Df^T)\\
&= \left((Df\circ\Phi)(x)D\Phi(x)\right)^T \quad (\text{wegen der Ketenregel})\\
&= O^T Df(\Phi(x))^T \quad (\text{weil } D\Phi = O)\\
&= O^{-1}(\nabla f\circ\Phi)(x) \quad (\text{weil } O \text{ orthogonal ist})\\
&= D\Phi(x)^{-1}(\nabla f\circ\Phi)(x) \quad (\text{weil } D\Phi = O)\\
&= \Phi^*(\nabla f).
\end{aligned}$$

(ii) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\Phi^* X\right)(x) &= tr\left(D(D\Phi^{-1})(x)X(\Phi(x))\right)\\
&= tr\left(D(O^{-1}X(\Phi(x)))\right) \quad (\text{weil } D\Phi = O)\\
&= tr\left(O^{-1}DX(\Phi(x))D\Phi(x)\right) \quad (\text{wegen der Kettenregel})\\
&= tr\left(O^{-1}DX(\Phi(x))O\right) \quad (\text{weil } D\Phi = O)\\
&= tr\left(OO^{-1}DX(\Phi(x))\right) \quad (\text{weil } tr(AB) = tr(BA))\\
&= tr\left(DX\circ\Phi(x)\right)\\
&= (\nabla\cdot X)\circ\Phi(x)\\
&= \Phi^*(\nabla\cdot X)(x).
\end{aligned}$$

(iii) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\Phi^* f\right) &= \nabla\cdot\left(\nabla\left(\Phi^* f\right)\right)\\
&= \nabla\cdot\left(\Phi^*\left(\nabla f\right)\right) \quad (\text{von (i)})\\
&= \Phi^*(\nabla\cdot(\nabla f)) \quad (\text{von (ii)})\\
&= \Phi^*(\Delta f).
\end{aligned}$$

12.4. Greensche Funktion für allgemeinen Halbraum

Wir setzen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als die euklidische Transformation $\Phi(x) = Ox$, und wir definieren

$$G_{O\cdot\mathbb{R}^n_+}(x,y) := G_{\mathbb{R}^n_+}\left(\Phi^{-1}x, \Phi^{-1}y\right).$$

Seien $x \in O\cdot\mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C_c^2(O\cdot\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$. Wir zeigen

$$\int_{O\cdot\mathbb{R}^n_+} G_{O\cdot\mathbb{R}^n_+}(x,y)\Delta\varphi(y)dy = \varphi(x). \tag{0.2}$$

Wir setzen die Änderung der Variablen $y' = \Phi^{-1} y$ um und finden

$$\begin{aligned}
\int_{O\cdot\mathbb{R}^n_+} G_{O\cdot\mathbb{R}^n_+}(x,y)\Delta\varphi(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n_+} G_{O\cdot\mathbb{R}^n_+}(x,\Phi(y))(\Delta\varphi)(\Phi(y))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} G_{\mathbb{R}^n_+}(\Phi^{-1}x,y)(\Phi)^*(\Delta\varphi(y))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} G_{\mathbb{R}^n_+}(\Phi^{-1}x,y)(\Delta\Phi^*\varphi(y))dy \;\; \text{(wegen der Aufgabe 12.3}(iii)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} G_{\mathbb{R}^n_+}(\Phi^{-1}x,y)\Delta\varphi(\Phi(y))dy \\
&= \varphi(\Phi(\Phi^{-1}(x))) \;\; \text{(wegen eines Satzes aus der Vorlesung)} \\
&= \varphi(x).
\end{aligned}$$

Nun sei $y \in \partial O \cdot \mathbb{R}^n_+$ und wir merken, dass $\Phi^{-1}(y) \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Daher gilt

$$G_{O\cdot\mathbb{R}^n_+}(x,y) = G_{\mathbb{R}^n_+}\left(\Phi^{-1}x, \Phi^{-1}y\right) = 0.$$